Ueber Systeme elliptischer Modulfunctionen von niederer Stufenzahl.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

an der

Universität zu Leipzig

vorgelegt

von

Robert Fricke.

Braunschweig,
Druck und Papier von Friedrich Vieweg und Sohn.
1886.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit

gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545817_0205

INHALTSVERZEICHNISS.

Vorbereitender Theil.

Seite

§. 1. Einleitung 1
§. 2. Feststellung einiger fundamentaler Begriffe 1
§. 3. Die Dreieckstheilung der ω-Halbebene 2
§. 4. Die Fundamentalpolygone 4
§. 5. Die Congruenzgruppen 5
§. 6. Die absolute Invariante $J(\omega)$ 6
§. 7. Specielle Gestalt der den Congruenzgruppen zugehörigen Fundamentalpolygone 7
§. 8. Methodische Bemerkungen und Abgrenzung des Stoffs 8

Capitel I. Die zweite Stufe.

§. 1. Fundamentalpolygon zweiter Stufe und zugehöriger Hauptmodul . 10
§. 2. Die transformirten Werthe der absoluten Invariante 12
§. 3. Zusammenhang von λ mit Theilwerthen der σ-Function 14
§. 4. Darstellung der zweiten p-Theilwerthe durch λ 18
§. 5. Verwandtschaft der Formenprobleme 19

Capitel II. Die dritte Stufe.

§. 1. Fundamentalpolygon und zugehöriger Hauptmodul 21
§. 2. Zusammenhang der transformirten J mit a 22
§. 3. Darstellung der Tetraëderirrationalität durch σ-Theilwerthe . . . 23
§. 4. Die dritten p-Theilwerthe 23
§. 5. Zusammenhang der Formenprobleme 25

Capitel III. Die vierte Stufe.

§. 1. Fundamentalpolygon und Moduln 26
§. 2. Die Galois'schen Systeme 28
§. 3. Transformirte Moduln 30
§. 4. und 5. Theilwerthe von $\sigma(u)$ und $p(u)$ 31
§. 6. Die Formenprobleme 35

Capitel IV. Die sechste Stufe.

Seite

§. 1. Eintheilung der Substitutionen $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ in Bezug auf die ganze Zahl 6 37
§. 2. Das Fundamentalpolygon sechster Stufe 39
§. 3. Das Integral erster Gattung 41
§. 4. Abbildung des Polygons auf eine Curve dritter Ordnung 46
§. 5. Algebraische Form der 72 Transformationen und geometrische Deutung 48
§. 6. Andere einfache Modulsysteme sechster Stufe 50
§. 7. Die transformirten σ-Theilwerthe 53
§. 8. Transformirte Moduln 56
§. 9. Die Theta-Relationen 58

Capitel V. Die achte Stufe.

§. 1. Das Fundamentalpolygon achter Stufe und das einfachste demselben zugehörige Galois'sche System 62
§. 2. und 3. Darstellung anderer Moduln achter Stufe im vollen Modulsystem 63

Capitel VI. Die neunte Stufe.

§. 1. Die Fläche und das einfachste System 66
§. 2. Zusammenhang mit transformirten $a(\omega)$ und den σ_{λ_μ} 67

Capitel VII. Die zehnte Stufe.

§. 1. Vorbemerkung und Fundamentalpolygon 69
§. 2. Bestimmung des Hauptmoduls $\tau(\omega)$ und der elliptischen Curve . . 70
§. 3. Transformation fünften Grades von $\lambda(\omega)$ 73
§. 4. Transformirte σ-Theilwerthe 80
§. 5. Die Theta-Relationen 81

Capitel VIII. Die sechszehnte Stufe.

§. 1. Fundamentalpolygon und Galois'sches System 16^{ter} Stufe 85
§. 2. Darstellung sonstiger Moduln 16^{ter} Stufe 86
§. 3. Schlussbemerkung 89

VORBEREITENDER THEIL.

§. 1.

Einleitung.

Die Theorie der elliptischen Modulfunctionen hat es mit allen solchen eindeutigen Functionen einer Variablen ω zu thun, welche gegenüber ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante Eins

$$\omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}; \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ungeändert bleiben.

Diejenigen elliptischen Modulfunctionen, die man bis jetzt fast ausschliesslich studirt hat, und von deren Kenntniss ausgehend man zu der eben genannten allgemeinen Definition inductiv aufstieg, nehmen einen sehr speciellen Spielraum ein in der allgemeinen Theorie der Functionen, welche jene Definition umfasst. Durch die nachfolgenden Untersuchungen soll ein Beitrag geliefert werden zur Theorie der eben gemeinten speciellen Classe von Modulfunctionen. Es ist daher nöthig, um zu jenen speciellen Gebieten hinzuführen und überhaupt eine erschöpfende Abgrenzung des Stoffs zu liefern, anhebend von der allgemeinen Definition der elliptischen Modulfunctionen eine längere Reihe von Begriffsbestimmungen und Erklärungen zu geben, welche uns zugleich über die Methodik des Studiums, die im Folgenden zur Verwendung kommt, den nöthigen Aufschluss geben wird.

Da indessen diese Erörterungen lediglich Referate bekannter Untersuchungen sind, so wird im Interesse der Kürze der Darstellung von zahlreichen Citaten auf die bezügliche Literatur Gebrauch gemacht.

§. 2.

Feststellung einiger fundamentaler Begriffe.

Sind ω_1, ω_2 zwei unabhängig veränderliche Grössen, so versteht man bei den hier in Betracht kommenden Untersuchungen unter linea-

rer Transformation derselben den Uebergang zu $\omega'_1\ \omega'_2$, vermöge der Gleichungen:

$$\omega'_1 = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2;\quad \omega'_2 = \gamma\,\omega_1 + \delta\,\omega_2;$$

wo α, β, γ, δ ganze Zahlen von der Determinante 1, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sind.

Die Gesammtheit der so definirten Operationen bildet die lineare Gruppe. Unter dem Index einer in dieser Gruppe enthaltenen Untergruppe versteht man die kleinste Anzahl μ so ausgewählter Substitutionen $T_1 \ldots T_\mu$, dass sich jede beliebige Substitution der linearen Gruppe als Combination eines T und einer Substitution der Untergruppe darstellen lässt.

Eine Modulform k^{ter} Dimension ist eine eindeutige homogene analytische Function k^{ter} Dimension zweier Argumente $\omega_1\ \omega_2$, die ungeändert bleibt bei einer Gruppe von ω-Substitutionen, die als Untergruppe in der eben definirten linearen Gruppe enthalten ist.

Ist insonderheit die Dimension $k = 0$, so hängt die Modulform nur vom Quotienten $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$ ab. Man nennt sie alsdann Modulfunction und also ist eine Modulfunction eine eindeutige analytische Function einer Variablen ω, die bei einer Reihe von Substitutionen ungeändert bleibt, welche als Untergruppe in der Gesammtheit der linearen ω-Substitutionen $\omega' = \frac{\gamma + \delta\,\omega}{\alpha + \beta\,\omega}$; $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ enthalten ist.

Die wesentliche Vereinfachung, welche der Fortgang von den Formen zu den Functionen ermöglicht, ist die, dass letztere Functionen eines einzelnen Argumentes sind und also in einer einzelnen complexen Ebene gedeutet werden können. Diese anschauliche Deutung unserer Functionen wird ausgiebig als Operationsmittel benutzt werden.

Die Behandlung der Modulformen würde allerdings, insofern dieselben homogene Functionen zweier Veränderlichen sind, modernen Auffassungsweisen näher stehen. Dem gegenüber sei betont, dass überall dort, wo homogene Schreibweise wünschenswerth erschien, dieselbe in organischem und leichtem Uebergange von der nichthomogenen erreicht werden konnte*).

§. 3.

Die Dreieckstheilung der ω-Halbebene.

Die positive ω-Halbebene sei der Inbegriff derjenigen Punkte $\omega = x + iy$, denen ein $y > 0$ zukommt. Innerhalb dieser Ebene

*) Für den Inhalt dieses Paragraphen vergleiche man hauptsächlich Klein, Math. Annalen. Bd. XVII, S. 62 ff. und Hurwitz, Math. Annalen. Bd. XVIII, S. 528 ff.

markire man die beiden Punkte $\omega = \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}$ und ziehe das durch sie begrenzte kleinere Stück desjenigen Kreises, dessen Radius gleich Eins und dessen Mittelpunkt der Punkt $\omega = 0$ ist. Ferner ziehe man von den beiden genannten Punkten $\omega = \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}$ aus zwei der imaginären ω-Axe parallele Gerade, die sich in Richtung der positiven imaginären Axe ins Unendliche ziehen. Den hierdurch eingegrenzten Dreiecksraum nennt man das Ausgangsdreieck. Dasselbe ist ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$. Die Hälfte der Randpunkte, etwa alle die, welche rechts von der imaginären Axe liegen, rechnen wir dem Dreieck zu, die übrigen nicht.

Man nennt zwei Zahlen ω, ω' einander äquivalent, wenn sie durch eine ganzzahlige Relation

$$\omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$$

verbunden sind und $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist.

Zu jedem beliebigen Punkte der ω-Halbebene gehört ein und nur ein Punkt des Ausgangsdreiecks als äquivalent zu*). Umgekehrt verlegt eine vorgegebene Substitution das Ausgangsdreieck in eine gewisse andere ebenfalls innerhalb der positiven Halbebene befindliche Lage. Ein System von Erzeugenden der linearen Gruppe bilden folgende beide Substitutionen:

$$\omega' = \omega + 1; \quad \omega' = -\frac{1}{\omega},$$

welche in der Folge S und T genannt werden. Die geometrische Bedeutung dieser Operationen ist leicht deutlich. Die Substitution S bedeutet eine congruente Verschiebung des Ausgangsdreiecks um die Strecke 1 in Richtung der positiven reellen ω-Axe also, dass die linke Grenzlinie des neuen Dreiecks mit der rechten des Ausgangsdreiecks identisch wird. Die Operation T bedeutet geometrisch eine Transformation durch reciproke Radien am Kreise mit dem Radius 1 um den Punkt $\omega = 0$ combinirt mit einer Spiegelung an der imaginären ω-Axe. Man sieht, dass durch die Dreiecke, welche den Operationen S, S^{-1}, T entsprechen, das Ausgangsdreieck gerade vollständig umschlossen wird.

Die der gesammten linearen Gruppe entsprechenden Dreiecke überdecken die ω-Halbebene einfach und lückenlos; sie entstehen aus

---

*) Bezüglich des Beweises dieser und der weiteren Mittheilungen berufe ich mich namentlich auf folgende drei Darstellungen: Dedekind, Crelle's Journal, Bd. 83, S. 265; Klein, Math. Ann. Bd. XIV, S. 119 u. Hurwitz l. c.

einem derselben durch fortgesetzte Spiegelung. Da bei dieser Operation die Winkel ungeändert bleiben, Kreise wieder in solche übergehen, so erscheint die Halbebene in unendlich viele Kreisbogendreiecke getheilt, welche die Winkel $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 tragen. In der Regel ist es üblich, den innerhalb des Ausgangsdreiecks gelegenen Theil der imaginären Axe zu markiren. Das Dreieck erscheint dadurch in zwei symmetrische Hälften zerlegt, von denen man eine, etwa die linke, schraffirt. Die Gruppe der linearen Transformationen überträgt diese Theilung auf sämmtliche Dreiecke. Die Halbebene ist dann von Kreisbogendreiecken mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 überdeckt. Ein Dreieck im anfänglichen Sinne wollen wir ein Doppeldreieck nennen.

§. 4.

Die Fundamentalpolygone.

Im Folgenden kommen ausschliesslich Untergruppen von endlichem Index zur Sprache. Sei derselbe gleich μ und $T_1\ T_2\ \ldots\ T_\mu$ die Substitutionen eines vollen Repräsentantensystems. Gehört dann V zur Untergruppe und ist U eine beliebig gewählte Substitution, so ist U nur auf eine Weise darstellbar als Product eines T in ein V, $U = T_k V$. Das heisst aber: Innerhalb des Complexes der Dreiecke T giebt es eines und nur eines T_k, welches mit dem beliebig gewählten Dreieck U vermöge der Untergruppe der V äquivalent ist. Das System der μ Dreiecke T_i nennt man Fundamentalpolygon der Untergruppe.

Eine eingehende Betrachtung (welche man z. B. in der citirten Abhandlung des Herrn Hurwitz findet) zeigt Folgendes: Das Fundamentalpolygon kann stets in der Weise angeordnet werden, dass es aus einem einzigen zusammenhängenden Complex von Dreiecken besteht, dessen specielle Gestalt noch sehr willkürlich gewählt werden kann. Jedem Punkte der ω-Halbebene entspricht ein und nur ein Punkt des Polygons vermöge der Substitutionen der Untergruppe. Dieses setzt voraus, dass über die Randpunkte des Polygons in geeigneter Weise verfügt ist. Dieselben dürfen nur zur Hälfte als zum Polygon gehörig angesehen werden. Die zweite Hälfte wird durch ein System von erzeugenden Substitutionen der Untergruppe in die erste übergeführt.

Die so postulirte Kantendeckung kann man sich im Sinne der *analysis situs* ausgeführt denken und erhält dadurch das Polygon in deformirter Form als eine im Raum gelegene geschlossene Riemann'sche Fläche, der ein gewisses Geschlecht p zukommt.

Modulfunctionen, welche der vorliegenden Untergruppe angehören, sind eindeutige Functionen des Ortes auf der Riemann'schen Fläche und waren dieselben innerhalb des Polygons frei von wesentlichen Singularitäten, so hat man es insonderheit mit algebraischen Functionen auf der Fläche zu thun.

In der Folge werden noch mehrere specielle Gestalten des deformirten Polygons benutzt werden. Doch thun wir besser, deren Beschreibung an Ort und Stelle nachzuholen.

§. 5.

Die Congruenzgruppen.

Alle der linearen Gruppe angehörigen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\gamma + \delta\,\omega}{\alpha + \beta\,\omega}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

deren Coefficienten eine der beiden folgenden Congruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv \delta \equiv 1; \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \\ \text{oder} \\ \alpha \equiv \delta \equiv -1; \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{n}$$

in Bezug auf die ganze Zahl n genügen, bilden eine Untergruppe, welche man die Congruenzgruppe der n^{ten} Stufe nennt. Das Theilungs-Princip für diese specielle Gattung von Untergruppen giebt die ganze Zahl n ab. In der Regel bezeichnet man etwas allgemeiner eine Untergruppe stets dann als Congruenzgruppe n^{ter} Stufe, wenn sich die arithmetische Natur der Coefficienten ihrer Substitutionen vollständig durch Congruenzen in Bezug auf die ganze Zahl n angeben lässt. Dann ist die oben definirte Congruenzgruppe als ausgezeichnete Untergruppe in allen ihrer Stufe angehörigen Congruenzgruppen enthalten.

Indem ich zur speciellen ausgezeichneten Congruenzgruppe n^{ter} Stufe zurückkehre, bemerke ich zunächst, dass dieselbe eine Untergruppe von endlichem Index ist. Seien, um dieses zu beweisen,

$$\omega' = \frac{\gamma' + \delta'\,\omega}{\alpha' + \beta'\,\omega}; \quad \omega'' = \frac{\gamma'' + \delta''\,\omega}{\alpha'' + \beta''\,\omega}$$

zwei Substitutionen, deren entsprechende Coefficienten (mod. n) einander congruent sind, so zeigt factische Ausrechnung, dass ω' und ω'' vermöge einer Substitution zusammenhängen, die (mod. n) der Identität congruent ist, d. h. zur Congruenzgruppe n^{ter} Stufe gehört. Umgekehrt ergiebt auch die Combination einer Substitution der Congruenzgruppe mit einer beliebigen Substitution eine zu dieser letztern congruente. Also sind je zwei beliebige Substitutionen, die einander (mod. n) congruent sind, bezüglich der Congruenzgruppe n^{ter} Stufe äquivalent, so

zwar, dass sich die ganze Reihe congruenter Substitutionen gerade erschöpfend darstellt, wenn man eine einzige unter ihnen mit der Congruenzgruppe verbindet. Somit bildet ein System (mod. n) incongruenter Substitutionen ein Repräsentantensystem und ihre Anzahl ist gleich dem Index der Congruenzgruppe. Aber diese fragliche Anzahl ist endlich, nämlich:

$$N = \frac{n^3}{2} \Pi \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

wo das Product über alle in n enthaltenen Primzahlen p zu nehmen ist*).

Alle Modulfunctionen, welche aus der gewöhnlichen Theorie der elliptischen Functionen hervorgehen, gehören Congruenzgruppen an. Nennt man somit eine Modulfunction, welche bei den Substitutionen der Congruenzgruppe n^{ter} Stufe unverändert bleibt, einen Congruenzmodul der n^{ten} Stufe, so sind mit der allgemeinen Behandlung der Congruenzmoduln zugleich alle Moduln der gewöhnlichen Theorie erschöpft.

§. 6.

Die absolute Invariante $J(\omega)$**).

Um die nun gewonnenen Begriffsbestimmungen durch ein einfachstes Beispiel zu illustriren, schalte ich hier Einiges über die absolute Invariante ein, ohne indessen die Beweisgründe für die gegebenen Behauptungen des Weiteren zu berühren. Es giebt eine eindeutige Function $J(\omega)$, welche der Bedingung genügt:

$$J\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = J(\omega);$$

unter $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ eine beliebige der linearen Gruppe angehörige Substitution verstanden. Da sich die gesammte lineare Gruppe auch als Congruenzgruppe erster Stufe auffassen lässt, so ist in diesem Sinne $J(\omega)$ ein Congruenzmodul der ersten Stufe. In äquivalenten Punkten der einzelnen Dreiecke erhält somit J stets denselben Werth und ist überdies noch durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass es innerhalb eines Dreiecks, beispielsweise des Ausgangsdreiecks, einen beliebigen

---

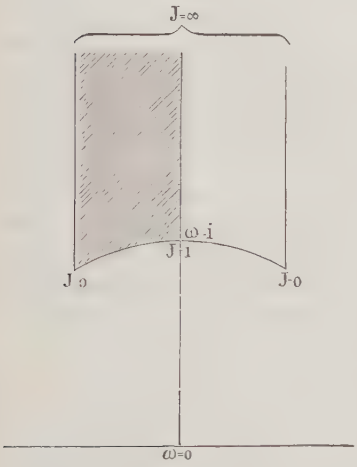
*) Eine Herleitung der Zahl N findet man bei Camille Jordan, *traité des substitutions* etc. im Capitel „*De l'ordre du groupe linéaire.*“ Uebrigens vergl. man für das über Congruenzgruppe Gesagte die mehrfach citirten Abhandlungen, insbesondere Hurwitz „Modulfunctionen und Multiplicatorgleichungen etc.“ in Bd. XVIII der mathem. Annalen.

**) Herr Dedekind nennt diese Function Valenz, cf. Crelle's Journ. Bd. 83 l. c. Ueber die Bezeichnung des Textes vergl. man Herrn Klein's Abhandlung im 14. Annalenbande, S. 111 u. ff.

complexen Werth einmal und nur einmal annimmt. Also ist das nebenstehende Bild (Fig. 1) des Ausgangsdreiecks zugleich ein vollständiges Bild der complexen Ebene von J, d. h. die conforme Abbildung dieses Dreiecks auf eine Ebene wird durch die Function $J(\omega)$ vermittelt.

Alle diese Eigenschaften theilt J mit jeder davon linear abhängenden Function $\frac{aJ+b}{cJ+d}$ und da in dieser Art durch die Verhältnisse $a:b:c:d$ drei Bedingungen implicirt werden, so darf man der eindeutigen Beziehung der Ebene J und ihres Bildes zu einander drei Bedingungen willkürlich vorschreiben. In diesem Sinne hat man festgesetzt, dass

Fig. 1.



$$J(i) = 1;\ J\left(\frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 0;$$

$$J(i\infty) = \infty$$

sei. Die beiden Ecken des Dreiecks bei $\frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}$ sind äquivalente Punkte, da der eine durch die Substitution S in den anderen übergeführt wird. Sehen wir, wie es schon vordem geschah, nur diejenigen Randpunkte als zum Dreieck gehörig an, welche rechts von der imaginären Axe liegen, so ist die vollständige Begrenzung des nicht schraffirten Elementardreiecks das Bild der reellen J-Axe, dieses Dreieck selbst das Bild der negativen Halbebene von J, ebenso wie das schraffirte Dreieck der positiven Halbebene entspricht. Die Punkte, welche mit $\omega = i$ äquivalent sind, nenne ich im Folgenden kurz Punkte $J = 1$ und brauche eine analoge Bezeichnung für die mit $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ resp. $\omega = i\infty$ äquivalenten Punkte.

§. 7.

Specielle Gestalt der den Congruenzgruppen zugehörigen Fundamentalpolygone.

Die Polygone der Congruenzgruppen haben einige hervorragend einfache Eigenschaften; ich nenne nur die folgenden, indem ich auch hier der Kürze wegen die übrigens elementaren Beweisgründe umgehe.

Die N Doppeldreiecke des Polygons der Congruenzgruppe n^{ter} Stufe lassen sich aus $2 \cdot n$ abwechselnd symmetrischen und congruenten Parallelstreifen zusammensetzen, deren einzelner zwischen zwei auf der reellen ω-Axe in der Entfernung $1/2$ von einander senkrechten Geraden der ω-Theilung enthalten ist. Für die Reproduction höherer Polygone aus niederen werden genannte Parallelstreifen in der Folge eine Rolle spielen.

Unter Beobachtung der Kantendeckung findet man, dass in allen Punkten $J = \infty$ n Doppeldreiecke im Cyclus zusammenhängen, ebenso bei $J = 0$ je drei, bei $J = 1$ je zwei*).

Es ist schliesslich noch ein Punkt zu erledigen. Sei $T_1\ T_2 \ldots T_N$ wieder das System incongruenter Substitutionen. Wenden wir auf ω eine der Substitutionen T an und betrachten zwei Substitutionen als gleich, wenn sie (mod. n) congruent sind, so ist nach ausgeführter Operation nur die Reihenfolge der T permutirt. Zugleich zeigt eine kurze Ueberlegung, dass durch Zuordnung eines T_i zu einem T_k die Zuordnung der übrigen und somit die ganze Permutation festgelegt ist. Da wir T_i irgend einem der T zuordnen können, so giebt es N solcher Permutationen, die Identität mit eingerechnet. Geometrisch gesprochen heisst dieses: Das Polygon lässt N Verschiebungen in sich zu oder die Riemann'sche Fläche lässt sich auf N Weisen eindeutig auf sich selbst beziehen. Gruppentheoretisch ist durch diese Eigenschaft des Polygons die Congruenzgruppe als ausgezeichnete Untergruppe charakterisirt.

§. 8.

Weitere methodische Bemerkungen und Abgrenzung des Stoffs der nachfolgenden Untersuchung.

Den nunmehr gewonnenen Riemann'schen Flächen gehören die aus der Theorie der elliptischen Functionen entspringenden Modulfunctionen als algebraische Functionen an und wir haben somit für das Studium derselben ein anschauliches Substrat gewonnen. Andererseits kann man aber auch die Theorie der elliptischen Functionen wenigstens zunächst gänzlich meiden und nach Riemann'scher Anschauungsweise von den Flächen auf ihnen zugehörige Functionen schliessen. Zugleich erledigt diese Behandlungsweise insofern die principielleren Fragen, als sie auf einfachste Modulsysteme führt, in welchen jede andere der betreffenden Stufe angehörige Function sich rational muss darstellen lassen und die somit fortan den Untersuchungen ihrer Stufen zu Grunde zu legen sind.

*) Ueber die algebraische Bedeutung dieser Verzweigungsart vergleiche man eine Reihe von Abhandlungen des Herrn Dyck in dem 17. und 18. Annalenbande.

Dieses ist die Methode, nach der die Behandlung der niedersten Primzahlstufen durchgeführt ist*). Eine Verallgemeinerung der dadurch erhaltenen Resultate für Primzahlen oder auch für ungerade nicht durch 3 theilbare Zahlen, gelang dann durch Vermittelung der Theorie der elliptischen Normalcurven**).

Für die durch 2 und 3 theilbaren Stufenzahlen blieb die Aufgabe noch zu lösen. Unter diesen Zahlen sind wiederum die niedersten einer directen functionentheoretischen Betrachtung zugänglich, welche dann für die Erledigung der allgemeinen Fälle 2^α oder 3^β den Sinn hat, inductiv zu allgemeinen Gesichtspunkten zu führen. Die Behandlung der niedersten Fälle sucht die nachfolgende Untersuchung zu leisten. Dabei sei allerdings sogleich betont, dass die allgemeine Tendenz, welche wir soeben mit einem solchen Unternehmen verknüpften, in manchen Partien des Folgenden gänzlich vergessen wird, weshalb es auch zu entschuldigen ist, dass die Grenze, welche die Form der Stufenzahl $2^\alpha 3^\beta$ vorschreibt, gelegentlich bedeutend überschritten wird.

Was die formelle Theilung des Stoffs anlangt, so ist derselbe wieder nach der Zahl der Stufe geschieden. Da übrigens die ganze Arbeit mehr aus einer Reihe coordinirter Untersuchungen besteht, so geht der Darstellung vielfach ein eleganter architektonischer Aufbau ab. Man hat indessen den Grund hierfür mehr in der Materie selbst als in der formellen Anordnung zu suchen.

Mehrfache principielle Erörterungen, welche eigentlich an dieser Stelle hätten gebracht werden müssen, verspare ich bis an diejenige Stelle der Darstellung, wo sie zuerst benöthigt werden und zwar zu dem Zwecke, um sie in concreterer Form geben zu können. Ich beginne mit der Behandlung der niedersten Zahlen 2, 3, 4, wobei allerdings zahlreiche Wiederholungen bekannter Thatsachen nöthig werden. Es ist indessen schon deshalb erforderlich, weil sich die Behandlung der weiteren Stufen durchaus auf jene gründet.

Herr Klein hatte die Güte, einen Theil der Resultate der nachfolgenden Untersuchung in einer Note: „Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen“ (Abschnitt I) der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vorzulegen. Man sehe die Sitzungsberichte vom 2. März a. c. der genannten Gesellschaft.

Ich ergreife gern auch an dieser Stelle die Gelegenheit, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Klein, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen für die Förderung, die er meinen Arbeiten angedeihen liess.

*) cf. Herrn Klein's diesbez. Abh. im XIV. und XV. Bande der math. Ann.

**) Zu vergleichen Bianchi, Bd. XVII der math. Ann., S. 234 und Herrn Klein's neueste Publication: „Ueber ellipt. Normalcurven und zugehörige Modulf.“ in den Abhandl. der sächs. Gesellschaft der Wiss.

Capitel I.

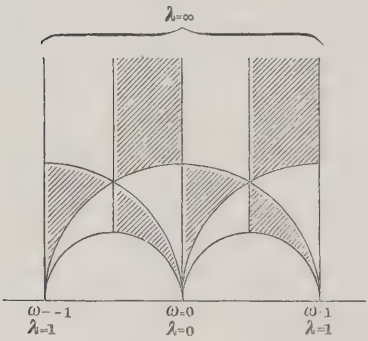
Die zweite Stufe.

§. 1.

Das Fundamentalpolygon zweiter Stufe und der zu demselben gehörige Hauptmodul.

Das Polygon der Congruenzgruppe zweiter Stufe enthält sechs Doppeldreiecke, welche in vier Parallelstreifen von je drei Elementardreiecken zerfallen, in der Weise, wie nebenstehende Fig. 2 angiebt. Ich bezeichne abkürzend einen Halbkreis der ω-Theilung durch (m, n), wenn er in den reellen rationalen Punkten $\omega = m$ und $\omega = n$ die reelle Axe orthogonal trifft. Da nun in allen Punkten, mit denen das Polygon an die reelle Axe heranragt (Punkten $J = \infty$) stets zwei Doppeldreiecke zusammenhängen, so deckt sich der Kreisbogen $(0, -1)$ mit $(0,1)$ und die gerade Linie $(-1, \infty)$ mit $(1, \infty)$ vermöge der Congruenzgruppe zweiter Stufe.

Fig. 2.



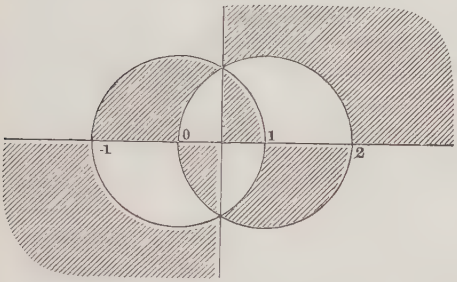
Führen wir nun durch Zusammenfügen der einander entsprechenden Kanten die Deformation des Polygons in eine Riemann'sche Fläche aus, die ihr im Sinne der *analysis situs* aequivalent ist, so kann man insonderheit erreichen, dass diese Riemann'sche Fläche eine einzelne Ebene überall einfach überdeckt. Ertheilen wir somit das Geschlecht p der Riemann'schen Fläche auch dem Fundamentalpolygon, so haben wir den Satz: Das Polygon der Congruenzgruppe zweiter Stufe ist vom Geschlecht $p = 0$. Sobald dieses der Fall ist, kann kein Zweifel sein, dass man als einfachste Function der Fläche diejenige anzusehen hat, von welcher alle anderen rational abhängen. Diese einfachste Function heisst der Hauptmodul zweiter Stufe und ist im Folgenden durch $\lambda(\omega)$ bezeichnet. Ebenso wie bei der Einführung von $J(\omega)$ haben wir auch hier zu beachten, dass λ alle seine wesentlichen Eigenschaften mit jeder davon linear abhängigen Grösse

$a \cdot \frac{\lambda + b}{\lambda + c}$ theilt. Wir haben somit eigentlich ∞^3 verschiedene Formen des Hauptmoduls und werden eine specielle Wahl getroffen haben, wenn wir drei verschiedenen übrigens willkürlichen Zahlwerthen von λ drei beliebige Punkte des Polygons zuordnen. In diesem Sinne benutze ich im Folgenden stets die Annahme:

(1) $$\lambda(0) = 0; \quad \lambda(1) = 1; \quad \lambda(\infty) = \infty.$$

In der conformen Abbildung des Polygons durch die Grösse λ erscheinen die Dreiecke wieder als durch Kreisbogen begrenzt, tragen aber nun die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$. Durch 12 solcher Dreiecke überdeckt man eine Ebene gerade einfach und vollständig, wie die nun gegebene Fig. 3 anzeigt. Dieselbe giebt gerade die complexe λ-Ebene wieder, wenn die dort angegebenen Zahlen die Werthevertheilung des λ orientiren.

Fig. 3.



Durch stereographische Beziehung dieser Ebene auf eine Kugel kann man es insbesondere erreichen, dass die reelle λ-Axe ein grösster Kugelkreis, sagen wir ein Aequator, werde, auf dem $\lambda = 0, 1, \infty$ drei äquidistante Punkte sind. Die Punkte, in denen drei Doppeldreiecke zusammenhängen, und in denen $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ wird, figuriren dann als Pole der Kugel*).

Auf der Kugel werden sämmtliche Dreiecke congruent und man kann an diese Gestaltung einen Beweis für die Richtigkeit der soeben beschriebenen Abbildung anknüpfen. Den sechs Transformationen des Polygons in sich entsprechen die sechs möglichen Drehungen der Kugel in sich, welche die Theilung mit sich selbst zur Deckung bringen. Drehungen der Kugel in sich entsprechen aber lineare Transformationen des λ und also haben wir zwei einander holoedrisch isomorphe Gruppen von je sechs Substitutionen, nämlich einerseits die sechs ω-Substitutionen, auf welche sich die lineare Gruppe reducirt, wenn deren Substitutionen nur (mod. 2) genommen werden, andererseits die eben genannte Gruppe der sechs linearen Transformationen von λ. Diese Beziehung im Ver-

*) Eine ausführliche Darstellung giebt Herr Klein in den math. Ann. Bd. IX, S. 191 und Bd. XIV, S. 115, sowie in den „Vorlesungen über das Ikosaeder".

ein mit der Festsetzung der drei speciellen λ-Werthe bestimmt die Transformationen des λ vollkommen. Es sind die bekannten sechs:

$$(2) \qquad \lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

Discutirt man diese sechs Verschiebungen der λ-Ebene in sich, indem man übrigens darauf Obacht giebt, dass die Punkte $\omega = 0,\ 1,\ i\,\infty$ resp. den Punkten $\lambda = 0,\ 1,\ \infty$ entsprechen, so wird man gerade auf die Dreiecksconfiguration geführt, welche die Fig. 2 angiebt und welche somit das conforme Bild des Polygons zweiter Stufe ist.

In ähnlicher Weise kann man sich übrigens auch in den folgenden, die Stufen 3 und 4 betreffenden Fällen von der Richtigkeit der dort geschilderten Abbildungen überzeugen.

Das $\lambda(\omega)$ ist übrigens identisch mit dem Jacobi'schen Integralmodul $k^2(\omega)$, welche Bezeichnung in der Folge mehrfach benutzt wird, oder auch mit dem Doppelverhältniss der biquadratischen binären Form, welche dem elliptischen Gebilde zu Grunde liegt.

Mit der absoluten Invariante J, dem Hauptmodul erster Stufe, hängt λ in bekannter Weise durch die Diëdergleichung sechsten Grades zusammen:

$$(3) \qquad J : J - 1 : 1 = 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 : 27\lambda^2(1-\lambda)^2\ *).$$

§. 2.

Die transformirten Werthe der absoluten Invariante.

Wir werden nun suchen, das λ mit etwa übrigens bekannten Moduln zweiter Stufe in Verbindung zu bringen.

Wendet man Transformation zweiten Grades auf $J(\omega)$ an, so entstehen die drei Modulfunctionen $J\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $J\left(\frac{\omega+1}{2}\right)$, $J(2\omega)$, welche bei der Congruenzgruppe zweiter Stufe ungeändert bleiben. Wir schliessen somit, genannte drei Functionen seien rational in λ und suchen nach einem Mittel, die Gestalt dieser rationalen Functionen zu erfahren. Setzt man nun $\omega' = \frac{\omega}{2}$, so heisst dies doch, die Halbebene ω' sei in Kreisbogendreiecke eingetheilt, deren Dimensionen gerade die doppelten gegenüber der Theilung der ω-Halbebene sind. Der Satz $J(\omega')$ sei rational in λ, heisst also geometrisch gesprochen: Bringen wir die Ebene ω' mit der von ω zur Deckung, so findet in den Grenzen des alten Polygons zweiter Stufe gerade eine ganze Zahl von Dreiecken der neuen Theilung Platz. In der That genügen gerade

*) Vergl. auch Clebsch: „Theorie der bin. Formen." S. 169 u. f.

sechs Dreiecke der neuen Theilung zu genanntem Zwecke, wie man sich z. B. durch wirkliche Ausführung der entsprechenden Zeichnung ohne Mühe überzeugt. Dieses heisst aber $J\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ist eine rationale Function sechsten Grades von λ; es finden sich in der Ebene $\lambda(\omega)$ sechs Bilder der Ebene von $J\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oder umgekehrt über der letzteren Ebene ist die erstere als sechsblätterige Riemann'sche Fläche ausgebreitet, deren charakteristische Verzweigungsart aus den beiderseits vorliegenden Figuren sofort abgelesen werden kann. Das Resultat ist dieses: Die Abbildung der Ebene von $J\left(\frac{\omega}{2}\right)$ auf das Polygon zweiter Stufe ist conform mit Ausnahme der drei Werthe $J\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0, 1, \infty$.

Bei $J\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$ hängen dreimal zwei Blätter im Cyclus zusammen, bei $J = 1$ zweimal drei Blätter, bei $J = \infty$ sind zwei Blätter unverzweigt, vier hängen cyclisch zusammen; zugleich sieht man, dass die drei letzteren Punkte die Werthe $\lambda = \infty$, 1, 0 tragen. Diese Ueberlegung gestattet folgenden Ansatz:

$$J\left(\frac{\omega}{2}\right) : J\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 : 1$$
$$= (a\lambda^2 + b\lambda + c)^3 : (d\lambda^3 + e\lambda^2 + f\lambda + g)^2 : h\lambda^4(\lambda - 1).$$

Zur Bestimmung der noch unbekannten numerischen Coefficienten genügt der Ansatz der Identität:

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)^3 - h\lambda^4(\lambda - 1) = (d\lambda^3 + e\lambda^2 + f\lambda + g)^2,$$

welche offenbar erfüllt sein muss. Indem wir diese Gleichung nach Potenzen von λ ordnen und den Coefficienten jeder Potenz identisch Null setzen, erhalten wir eine übergrosse Anzahl von Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Coefficienten.

Das Resultat der angedeuteten Rechnung ist:

(1)
$$J\left(\frac{\omega}{2}\right) : J\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 : 1$$
$$= (\lambda^2 - 16\lambda + 16)^3 : (\lambda^2 + 32\lambda - 32)^2 (\lambda - 2)^2 : 108\lambda^4(1 - \lambda).$$

Hieran reihen sich zwei andere Gleichungen zur Darstellung von $J\left(\frac{\omega + 1}{2}\right)$ und $J(2\omega)$, die man in analoger Entwickelung oder auch aus (1) durch lineare Transformation erhält:

(2)
$$J\left(\frac{\omega + 1}{2}\right) : J\left(\frac{\omega + 1}{2}\right) - 1 : 1$$
$$= (\lambda^2 + 14\lambda + 1)^3 : (\lambda^2 - 34\lambda + 1)^2 (\lambda + 1)^2 : 108(1 - \lambda)^4\lambda;$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} J(2\omega) : J(2\omega) - 1 : 1 &= (16\lambda^2 - 16\lambda + 1)^3 \\ : (32\lambda^2 - 32\lambda - 1)^2 &(1 - 2\lambda)^2 : 108\lambda(\lambda - 1). \end{aligned}$$

§. 3.

Zusammenhang von λ mit Theilwerthen der σ-Function.

Als Theilwerthe doppeltperiodischer Functionen betrachtet man gewöhnlich die durch Theilung der Functionen $p(u)$ und $p'(u)$ entspringenden Grössen $p\left(\frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$ etc. Inzwischen deuten zahlreiche Entwickelungen darauf hin, dass es zweckmässiger erscheint, an Stelle der p-Function dem $\sigma(u)$ die principiellere Stellung*) anzuweisen, gerade wie es auch in der Theorie der elliptischen Functionen geschieht. Es handelt sich dann also im Wesentlichen um Grössen der folgenden Art $\sigma\left(\frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$, in welchen n der Theilungsgrad, α und β ganze Zahlen sind, die nur (mod. n) zu nehmen sind. Damit sich diese Grössen in unsere bisherige Entwickelung ohne Weiteres einordnen, sind sie noch in gewisser Weise zu modificiren, wovon sogleich die Rede sein wird. Vordem sind zur Fixirung der Bezeichnungsweise folgende Bemerkungen einzuschalten.

Die σ-Function ist, wie bekannt, durch folgende Gleichung mit der Function ϑ_1 verbunden:

$$(1) \qquad \sigma(u, \omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt[8]{\Delta}} \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}, q\right).$$

Hier bedeuten $\eta_1\eta_2$ die Perioden des Integrals zweiter Gattung, welche mit den ω durch die Legendre'sche Relation:

$$(2) \qquad \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2i\pi$$

verbunden sind. Die achte Wurzel aus der Discriminante Δ ist definirt durch deren 24. Wurzel:

$$(3) \qquad \sqrt[24]{\Delta} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot q^{1/12} \prod_1^\infty (1 - q^{2m})$$

und die Function ϑ_1 in bekannter Weise:

$$(4) \quad \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}, q\right) = 2q^{1/4} \sin\frac{\pi u}{\omega_1} \cdot \prod_1^\infty (1 - q^{2m})\left(1 - 2q^{2m}\cos\frac{2u\pi}{\omega_1} + q^{4m}\right).$$

Nehmen wir nun einen Theilwerth der σ-Function:

*) Man vergl. insbes. Klein „Ellipt. Normalcurven etc." S. 8 und Herrn Kieperts Arbeiten in Crelles Journal, Bd. 76, 87, 88.

$$\sigma\left(\frac{\lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2}{n},\ \omega_1,\ \omega_2\right),$$

so ist derselbe, damit er überhaupt eine algebraische Modulform sei, d. h. algebraisch von g_2, g_3 abhänge oder einer Untergruppe von endlichem Index angehöre, zunächst mit einem Exponentialfactor zu versehen. Wir definiren:

$$(5) \qquad \sigma_{\lambda,\mu} = e^{\frac{-(\lambda\,\eta_1 + \mu\,\eta_2)(\lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2)}{2\,n^2}} \cdot \sigma\left(\frac{\lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2}{n},\ \omega_1,\ \omega_2\right).$$

Von der so gewonnenen Grösse ist alsdann, je nachdem n ungerade oder gerade ist, bereits die n^{te} Potenz oder erst die $2\,n^{\text{te}}$ Modulform n^{ter} Stufe. Bei den Substitutionen der Congruenzgruppe n^{ter} Stufe ändert sich $\sigma_{\lambda\mu}$ nur um Einheitswurzeln. In diesem Sinne nennt man den Theilwerth der n^{ten} Stufe adjungirt.

Handelt es sich nun um explicite Untersuchung eines Theil-Sigmas, so haben wir zunächst zu beachten, dass dasselbe eine Modulform erster Dimension ist, also nicht ohne Weiteres auf dem Polygon untersucht werden kann. Vielmehr haben wir zunächst einen Zusatzfactor, der von der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension sein muss, hinzuzusetzen, also am einfachsten den Quotienten zweier σ zu bilden, um eine Grösse zu erhalten, die directer Betrachtung auf dem Polygon zugänglich ist.

Für einen σ-Quotienten geben uns nun obige Darstellungen ein unendliches Product, das in der ganzen complexen ω-Halbebene endlich und von Null verschieden ist, mit alleiniger Ausnahme der Punkte der reellen Axe. Die Unstetigkeitspunkte und Verschwindungspunkte der Function liegen also ohne Ausnahme in den Zipfeln, mit denen das Polygon an die reelle Axe heranragt, den Punkt $\omega = i\,\infty$ mit inbegriffen.

Für den letztgenannten Punkt giebt die gewonnene analytische Darstellung des σ-Quotienten sogar direct die Art des Unendlichwerdens an, indem dieselbe in der Form

$$c \cdot q^{\frac{\mu}{\nu}}\,\mathfrak{P}(q)$$

erscheint, wo c eine numerische Grösse ist und die Potenzreihe im Punkte ∞ den Werth 1 annimmt. Die ganzen Zahlen μ und ν messen die Art des Unendlichwerdens. Dasselbe ist in allen Fällen algebraisch und also ist der σ-Quotient innerhalb seines Polygons frei von wesentlich singulären Stellen.

In den übrigen Spitzen des Polygons ist die Productdarstellung keiner directen Untersuchung fähig. Soll das Verhalten der Function in einem dieser Punkte untersucht werden, so zieht man denselben durch eine der N linearen Transformationen nach dem Punkte $\omega = i\,\infty$. Das Verhalten der lineartransformirten Function im Punkte

$\omega = i\infty$, ist dann dem der ursprünglichen Function im fraglichen Punkte der reellen Axe gleich. Auf die lineartransformirte Function hat die soeben geschilderte Methode sofort Anwendung, da deren Verhalten im Punkte $\omega = i\infty$ festzustellen ist. Auf solche Weise sind alle im Folgenden mitgetheilten Resultate gewonnen.

Die für den zweiten Theilungsgrad in Frage kommenden Grössen sind in oben definirter Abkürzung $\sigma_{10}, \sigma_{01}, \sigma_{11}$. Sie selbst sind Moduln der achten Stufe, während ihre vierten Potenzen der zweiten gehören. Ihr Zusammenhang mit dem λ ist der denkbar einfachste:

$$(6) \qquad -\left(\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{10}}\right)^4 = \lambda; \quad -\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{10}}\right)^4 = 1-\lambda.$$

Nun darf man aber nicht leugnen, dass die Umsetzung der $\sigma_{\lambda,\mu}$ in nicht homogene Form nur zum Zwecke ihrer Annäherung an die Polygone geschah und keineswegs im Wesen der σ begründet ist. Man wird daher wünschen, im Schlussresultate diese methodischen Spuren zu eliminiren, und um so mehr werden wir diesen Schritt thun, als wir von λ aus in völlig organischer Weise wieder zu homogener Darstellungsform zurückgehen können. In der That betrachtet man die Differentialquotienten von λ nach ω in folgender Form*):

$$(7) \qquad \lambda_1 = \frac{\omega_1 \lambda}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}}; \quad \lambda_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}};$$

so erscheint λ als Quotient zweier Modulformen erster Dimension, die sich bei linearen ω-Substitutionen ihrerseits binär linear substituiren. Dieses letztere zeigt eine explicite Durchrechnung. Man findet dabei, dass λ_1, λ_2 absolut genommen, der vierten Stufe angehören, dass sie indessen der zweiten adjungirt sind.

Stellen wir nun den Zusammenhang von λ_1 und λ_2 mit den drei $\sigma_{\lambda,\mu}$ fest: λ_1 ist Modulform vierter Stufe, erster Dimension, σ_{10} ebenfalls erster Dimension, also gilt der Ansatz

$$\left(\frac{\lambda_1}{\sigma_{10}}\right)^4 = r_1(\lambda),$$

da von beiden erst die zweite beziehungsweise vierte Potenz von zweiter Stufe ist. Explicit geschrieben ist:

$$\left(\frac{\lambda\,\omega_1}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}} \cdot \frac{1}{\sigma_{10}}\right)^4 = r_1(\lambda) \text{ und } \left(\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}} \cdot \frac{1}{\sigma_{10}}\right)^4 = r_2(\lambda).$$

Stellen wir nun zunächst die Art des Unendlichwerdens von r_1 für $\lambda = \infty$ fest. Es ist:

*) Man vergl. auch Hurwitz Bd. XVIII der Math. Annalen S. 559.

$$\frac{\pi}{\omega_1}\sigma_{10} = \prod_1^\infty \left(\frac{1+q^{2m}}{1-q^{2m}}\right)^2$$

und in erster Annäherung

$$\lambda = \frac{-1}{16q}; \quad \text{also} \quad \frac{d\lambda}{d\omega} = \frac{d\lambda}{dq}\cdot\frac{dq}{d\omega} = \frac{\pi i}{16q}.$$

Mithin findet sich r_1 annähernd:

$$-\pi^2\lambda^2 = r_1(\lambda).$$

Nun beachte man, dass $\frac{d\lambda}{d\omega}$ nur dort verschwindet oder ∞ wird, wo die Abbildung aufhört conform zu sein, also in den Spitzen, so dass auch r_1 nur in den Spitzen des Polygons 0 oder ∞ wird. Dies gestattet im Verein mit der soeben ausgerechneten Annäherung folgenden Ansatz:

$$\left(\frac{\lambda\omega_1}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}}\cdot\frac{1}{\sigma_{10}}\right)^4 = -\pi^2\lambda^\alpha(\lambda-1)^{2-\alpha}$$

und es bleibt nur noch die ganze Zahl α zu bestimmen. Zu dem Ende wendet man die Substitution T an, wodurch man folgende Bedingung für r_1 fordert:

$$r_1(\lambda) = -\lambda^5 r_1\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

was für α den Werth 3 giebt. Ich stelle nun sogleich das Resultat der weiteren Zwischenrechnung zusammen:

$$\sigma_{10}{}^4 = -\frac{1}{\pi^2}\cdot\lambda_1.\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2).\lambda_2$$

(8) $$\sigma_{01}{}^4 = +\frac{1}{\pi^2}\cdot\lambda_1.\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2).\lambda_1$$

$$\sigma_{11}{}^4 = -\frac{1}{\pi^2}\cdot\lambda_1.\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2).(\lambda_1-\lambda_2),$$

ein Resultat, das man zum Theil a priori erschliessen konnte.

Uebrigens kann man die Theilung des λ in den Quotienten von λ_1 und λ_2 noch in beliebiger anderer Weise herstellen und dadurch insbesondere erreichen, dass der lästige gemeinsame Factor $\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)$ hinwegfällt. Nur haben die soeben definirten $\lambda_1\lambda_2$ deshalb den Vorzug, weil sie von erster Dimension sind.

Man zeigt ohne Mühe durch Betrachtungen auf dem Polygon, dass folgende drei Gleichungen gelten:

$$\sigma_{10}{}^4.g_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)},$$

$$\sigma_{01}{}^4 . g_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{1 - \lambda},$$

$$\sigma_{11}{}^4 . g_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda}.$$

Setzt man nun $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ und verlangt, dass die Invariante g_2 in folgender Art durch λ_1, λ_2 dargestellt wird:

$$g_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}, \tag{9}$$

wodurch λ_1, λ_2 völlig bestimmt sind, so gelten offenbar folgende einfache Beziehungen:

$$-\sigma_{10}{}^4 = \lambda_2; \quad \sigma_{01}{}^4 = \lambda_1; \quad \sigma_{11}{}^4 = -\lambda_1 + \lambda_2. \tag{10}$$

§. 4.

Darstellung der zweiten p-Theilwerthe durch λ.

Es handelt sich nun um den Zusammenhang des λ mit den drei zweiten Theilwerthen der p-Function $p\left(\frac{\omega_1}{2}\right), p\left(\frac{\omega_2}{2}\right), p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$ oder in Weierstrass'scher Bezeichnung $e_1 e_2 e_3$, welche die Wurzeln der speciellen Theilungsgleichung

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0 \tag{1}$$

sind. Man kann diese Gleichung für die beabsichtigten Darstellungen verwenden.

Da x von $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension ist, so wird $y = \frac{g_2}{g_3} \cdot x$ von 0^{ter} Dimension und also rational in λ. Durch diese Substitution geht (1) über in die Form:

$$4 \frac{g_3^2}{g_2^3} \cdot y^3 - y - 1 = 0,$$

welche man auch so schreiben kann:

$$\frac{4}{27} \frac{J - 1}{J} = \frac{1 + y}{y^3}. \tag{2}$$

Wie man weiss, bestimmt die linke Seite sechs Punkte auf dem Polygon 2^{ter} Stufe, also auch die rechte, d. h. y ist rational vom 2^{ten} Grade in λ. Indem man eine solche Function in allgemeiner Form ansetzt, findet man aus (2) unter Berücksichtigung des Zusammenhanges von J und λ nur drei mögliche Lösungssysteme für die unbekannten numerischen Coefficienten der Function 2^{ten} Grades. Dieselben geben

unter Beobachtung der richtigen Zuordnung die rationalen Darstellungen der $\frac{g_2}{g_3} \cdot p_i$ durch λ.

Zum Zwecke homogener Schreibweise definiren wir hier ein Formenproblem durch folgende Festsetzung:

$$(3) \qquad \frac{9 g_3}{g_2} = \frac{2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3}{\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}.$$

Die homogenen Endformeln haben dann folgende einfache Gestalt:

$$(4) \qquad 3p\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 2\lambda_1 - \lambda_2; \quad 3p\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 2\lambda_2 - \lambda_1;$$

$$3p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = -\lambda_1 - \lambda_2;$$

oder auch in anderer Schreibweise:

$$(5) \qquad e_1 - e_2 = \lambda_1 - \lambda_2; \quad e_1 - e_3 = \lambda_1; \quad e_2 - e_3 = \lambda_2.$$

Hieraus resultirt die äusserst bekannte Formel:

$$\lambda = \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}.$$

§. 5.

Verwandtschaft der Formenprobleme.

Es ist der Mühe werth, die drei benutzten Theilungen des λ in ihrem gegenseitigen Verhältnisse noch näher zu charakterisiren. Um Verwechselungen zu meiden, schreibe ich $\lambda = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ und $\lambda = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ für diejenigen Formenprobleme, welche die Darstellung der σ- beziehungsweise p-Theilwerthe anbahnten. Es ist also:

$$(1) \qquad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2},$$

$$(2) \qquad \lambda_1 = \frac{\lambda\omega_1}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}}; \quad \lambda_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}}.$$

$$(3) \qquad g_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\mu_1^2 - \mu_1 \cdot \mu_2 + \mu_2^2}{\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1)},$$

$$(4) \qquad 9\frac{g_3}{g_2} = \frac{2\nu_1^3 - 3\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1\nu_2^2 + 2\nu_2^3}{\nu_1^2 - \nu_1\nu_2 + \nu_2^2}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}$ sei durch folgende Festsetzung fixirt:

(5) $$lim\left[\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}\right]_{\omega = i\infty} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{4q^{1/2}}.$$

(3) und (4) sind in anderer Schreibart:

$$\frac{2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2}{\lambda^2 - \lambda + 1}\cdot \nu_2 = 9\frac{g_3}{g_2},$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda(1-\lambda)}\cdot\frac{1}{\mu_2} = g_2.$$

Hieraus durch Multiplication und Benutzung von (3) §. 1:

(6) $$4\sqrt{3}\,\sqrt{J-1}\cdot\frac{\nu_2}{\mu_2} = 9g_3.$$

Aber es ist (Math. Ann. Bd. XIV, p. 112):

$$\sqrt{J-1} = \frac{3\sqrt{3}\,.\,g_3}{\sqrt{\Delta}},$$

also schliesslich:

(7) $$\frac{4\nu_2}{\mu_2} = \sqrt{\Delta}.$$

Ferner folgt aus (8) und (10) §. 3:

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)\,.\,\lambda_2 = \pi^2\,.\,\mu_2$$

oder:

$$\lambda(\lambda - 1)\lambda_2^4 = \pi^2\mu_2,$$

$$\lambda_2^4 = \frac{\pi^2\mu_2^4}{\mu_1\mu_2(\mu_1 - \mu_2)}.$$

Aus (3) folgt:

$$g_2^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{\mu_1^2 - \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}{\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1)}\right)^3.$$

Aber es ist:

$$g_2^3 = \Delta\,.\,J = \frac{\Delta}{16}\left(\frac{4}{3}\right)^3\left(\frac{\mu_1^2 - \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}{\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1)}\right)^3\cdot\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1).$$

Also ist:

$$\frac{16}{\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1)} = \Delta,$$

d. h.

$$-\Delta\pi^2\,.\,\mu_2^4 = (2\lambda_2)^4$$

und unter ε eine 8^{te} Einheitswurzel verstanden:

$$\varepsilon\,.\,2\lambda_2 = \sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{\Delta}\,.\,\mu_2.$$

Vermöge (5) ist in der Nähe des Punktes $\omega = i\infty$ die linke Seite

$$2\varepsilon\cdot\frac{4\omega_1 q^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,.\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}};$$

ebenso ist:

$$\sqrt[4]{\Delta} = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^3 q^{1/2} \text{ und } \mu_2 = -\sigma_{10}{}^4 = -\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^4.$$

Durch Substitution dieser Werthe findet man $\varepsilon = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, so dass

$$(8) \qquad -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot 2\lambda_1 = \sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{\Delta}\,\mu_1.$$

Folgendes ist das Resultat dieser kleinen Entwickelung: λ_1 und λ_2 sind nur der zweiten Stufe adjungirt, das Gleiche gilt auch von $\sqrt[4]{\Delta}$ und zwar derart, dass sowohl Product als auch Quotient beider Grössen der zweiten Stufe absolut angehören. Das Product giebt die Theil-Sigma, der Quotient die p-Theilwerthe. Die noch dabei auftretenden numerischen Coefficienten sind durch folgende Proportion gemeinsam gegeben:

$$(9) \qquad \mu_1 : \lambda_1 : \nu_1 = \mu_2 : \lambda_2 : \nu_2 = \frac{2}{\sqrt[4]{\Delta}} : \frac{i-1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi} : \frac{\sqrt[4]{\Delta}}{2};$$

Capitel II.

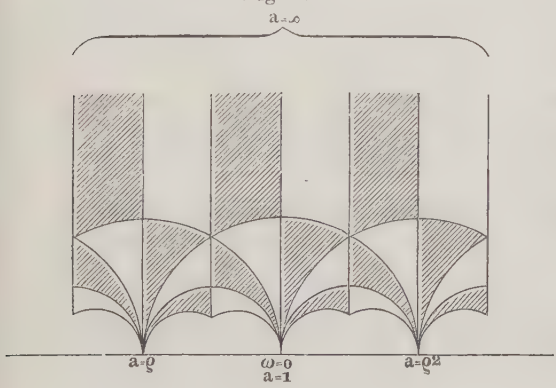
Die dritte Stufe.

§. 1.

Das Fundamentalpolygon und der zugehörige Hauptmodul.

Das Fundamentalpolygon dritter Stufe besteht aus zwölf Doppeldreiecken, so dass jeder der sechs Parallelstreifen vier Kreisbogendreiecke enthält. Dieselben sind nach unten begrenzt durch den Kreis $\left(0, \frac{2}{3}\right)$. Ein Dreieck des Streifens zieht sich nach dem Punkte $\omega = i\infty$; drei andere hängen bei $\omega = 0$ zusammen. Je zwei freie Kreiskanten, die in einem Punkte der reellen Axe zusammenstossen, decken sich vermöge der Erzeugenden der Congruenzgruppe dritter Stufe.

Fig. 4.



Auch diese Fläche ist vom Geschlecht Null. Man darf also wieder auf die Existenz einer

Grösse schliessen, in der sich alle Moduln dritter Stufe rational darstellen. Dieser Hauptmodul heisse $a(\omega)$ und sei fixirt durch die Festsetzung:

$$(1) \qquad a(0) = 1;\ a(1) = \varrho^2;\ a(2) = \varrho;\ \left(\varrho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right).$$

In der conformen Abbildung des Polygons auf die a-Ebene sind die Dreiecke wieder von Kreisbögen begrenzt, die aber nun die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ tragen. In der That kann man eine Ebene gerade durch 24 solche Dreiecke einfach und vollständig überdecken. Ueberträgt man die so getheilte Ebene in gewisser Weise stereographisch auf eine Kugeloberfläche so zwar, dass die vier Punkte $a = 1, \varrho, \varrho^2, \infty$ die vier Ecken eines der Kugel eingeschriebenen Tetraeders werden, so entspringt daraus die bekannte tetraedrische Eintheilung der Kugeloberfläche. Die Grösse a ist also die Tetraederirrationalität*), insofern J als gegeben angesehen wird.

§. 2.

Zusammenhang der durch Transformation dritten Grades aus J entstehenden Grössen mit a.

Ueberlegungen, welche den im §. 2 des vorigen Capitels angegebenen durchaus analog sind, führen auf 12blätterige Riemann'sche Flächen von bestimmt angebbarer Verzweigungsart, welche die Ueberlagerung der Ebene von a über die complexen Ebenen der Functionen $J\left(\frac{\omega}{3}\right)$ etc. angeben. Da auch die weiteren Schritte in keiner Weise von den oben geschilderten abweichen, so genüge die Angabe einiger Resultate.

Man findet beispielsweise:

$$(1) \qquad J(3\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{a^3\,(9a^3 - 8)^3}{a^3 - 1};$$

$$(2) \qquad J\left(\frac{\omega}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \frac{(a+2)^3\,(a^3 + 78\,a^2 + 84\,a + 80)^3}{9\,(a^2 + a + 1)\,(a-1)^9};\ \text{etc.},$$

denen sich auch noch die Tetraedergleichung anschliessen möge:

$$(3)\ J : J - 1 : 1 = (a^4 + 8a)^3 : (a^6 - 20\,a^3 - 8)^2 : 64\,(a^3 - 1)^3.$$

*) Zu vergl. Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder“ und „Ellipt. Funct. und Gleichungen 5. Grades“, Ann. Bd. XIV, S. 154.

§. 3.

Darstellung der Tetraederirrationalität durch dritte σ-Theilwerthe.

Durch Theilung dritten Grades entstehen vier verschiedene $\sigma_{\lambda,\mu}$, welche weiterhin einander adjungirt heissen mögen. Sie gehören an sich der 9ten Stufe an, können indessen durch Erheben zur 3ten Potenz auf die 3te Stufe erniedrigt werden.

Demgemäss handelt es sich um folgende vier Grössen:

$$\sigma_{10}^3,\ \sigma_{01}^3,\ \sigma_{11}^3,\ \sigma_{12}^3.$$

Ihre Discussion auf dem Polygon dritter Stufe führt auf folgenden einfachen Zusammenhang mit dem a:

$$(1)\qquad a-1 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{10}}\right)^3;\quad a-\varrho = \varrho i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{10}}\right)^3;$$

$$a-\varrho^2 = \varrho^2 i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{10}}\right)^3 *).$$

Zum Zwecke homogener Darstellung beweist man leicht die Richtigkeit der folgenden beiden Gleichungen:

$$\left(\sigma_{10}\sqrt[12]{\Delta}\right)^{12} = \frac{27}{a^3-1};\quad \sigma_{10}^6\cdot g_3 = \frac{a^6-20a^3-8}{8\,(a^3-1)^2}.$$

Dieselben sind die Ruhepunkte der übrigens elementaren Rechnung. Zufolge der letzten Gleichung bestimmen wir am passendsten a_1 und a_2 durch die Gleichungen:

$$(2)\qquad a = \frac{a_1}{a_2};\quad -24\,g_3 = \frac{a_1^6-20\,a_1^3\,a_2^3-8\,a_2^6}{a_2^2\,(a_1^3-a_2^3)^2}.$$

Wir finden dann einfach:

$$(3)\ \sigma_{10}^3 = i\sqrt{3}\,a_2;\ \sigma_{01}^3 = a_1-a_2;\ \sigma_{11}^3 = a_1\varrho^2-a_2;\ \sigma_{12}^3 = a_1\varrho-a_2.$$

§. 4.

Die dritten p-Theilwerthe.

Die specielle Theilungsgleichung für den dritten Theilungsgrad lautet wie folgt:

$$(1)\qquad x^4-\frac{g_2}{2}x^2-g_3\,x-\frac{1}{3}\left(\frac{g_2}{4}\right)^2 = 0.$$

*) Man vergl. auch Bianchi im 17. Bde. der Math. Annalen S. 244.

Die gesuchten Beziehungen der Wurzeln dieser Gleichung zur Tetraederirrationalität finden sich auf folgendem Wege:

Ist p insbesondere die Wurzel $p\left(\frac{\omega_1}{3}\right)$, die also bei der Substitution S ungeändert bleibt, so kann man schreiben:

$$1 = \frac{g_2}{2\,p^2} + \frac{g_3}{p^3} + \frac{1}{12}\left(\frac{g_2}{2\,p^2}\right)^2.$$

Sei nun $y = a^3$, so ist $\frac{g_2}{2\,p^2} = f(y)$ eine rationale Function von y. Hierdurch schreibt sich die letzte Gleichung:

$$\left(\frac{g_3}{p^3}\right)^2 = \left(1 - f(y) - \frac{1}{12} f^2(y)\right)^2$$

oder durch Benutzung bekannter Formeln:

$$\frac{J-1}{27\,J} = \frac{[1 - f(y) - \frac{1}{12} f^2(y)]^2}{[2\,f(y)]^3}$$

Nun ist die Darstellung von $\frac{J-1}{J}$ durch y oder a^3 durch die Tetraedergleichung gegeben. Daraus schliesst man sofort auf die Gestalt der Function f und findet durch einige Zwischenrechnungen:

$$f(y) = \frac{2}{3}\,\frac{y+8}{y}$$

oder

$$p^2\left(\frac{\omega_1}{3}\right) = \frac{3}{4}\,g_2 \cdot \frac{a^3}{a^3 + 8}.$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit $\frac{27\,J}{J-1}$:

$$p\left(\frac{\omega_1}{3}\right) \cdot \frac{g_2}{g_3} = -\frac{9}{2} \cdot \frac{a^3\,(a^3+8)}{a^6 - 20\,a^3 - 8}.$$

Die Gestalt dieser letzten Gleichung empfiehlt folgende Festsetzung von a_1 und a_2:

$$(2) \qquad a = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{und} \quad \frac{2\,g_2}{3\,g_3} = \frac{a_1\,(a_1^3 + 8\,a_2^3)}{a_1^6 - 20\,a_1^3\,a_2^3 - 8\,a_2^6}.$$

Dann gelten folgende einfache Endformeln:

$$\sqrt{p}\left(\frac{\omega_1}{3}\right) = i\sqrt{3}\,a_1; \quad \sqrt{p}\left(\frac{\omega_2}{3}\right) = a_1 + 2\,a_2;$$

(3)

$$\sqrt{p}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}\right) = a_1 + 2\,\varrho\,a_2; \quad \sqrt{p}\left(\frac{\omega_1 + 2\,\omega_2}{3}\right) = a_1 + 2\,\varrho^2\,a_2.$$

§. 5.

Zusammenhang der Formenprobleme.

Auch hier werden wir als das fundamentale System von Modulformen das folgende ansehen müssen:

$$(1) \qquad a = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{und} \quad a_1 = \frac{a\,\omega_1}{\sqrt{\frac{d\,a}{d\,\omega}}}; \quad a_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{d\,a}{d\,\omega}}}$$

und es würde unsere Aufgabe sein, die übrigen Theilungen, welche ich nun wieder zum Unterschiede b_1, b_2 (Formel (2), §. 3) und c_1, c_2 (Formel (2), §. 4) nenne, auf $a_1\,a_2$ zu beziehen.

Ich umgehe hier das Detail der Rechnung, deren einzelne Schritte von der Schilderung in Capitel I. nicht abweichen. Das Resultat ist: a_1 und a_2 bilden ein Modulsystem erster Dimension, das der dritten Stufe adjungirt ist und zwar gerade in der Weise, wie die 6^{te} Wurzel der Discriminante, also dass Product und Quotient beider Grössen wieder der 3^{ten} Stufe angehören. Aber $\sqrt[6]{\Delta}$ ist von $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, so dass der Quotient 3^{ter} Dimension ist. Man erhält das Modulsystem b oder die σ-Theilwerthe. Das Product von a_1, a_2 in $\sqrt[6]{\Delta}$ müsste also $(-1)^{\text{ster}}$ Dimension sein und es ist interessant genug, dass die p-Theilwerthe vollständige Quadrate werden, damit ihre Wurzeln, welche von $(-1)^{\text{ster}}$ Dimension sind, wesentlich identisch werden mit dem einfachsten Systeme $c_1\,c_2$. Die noch auftretenden numerischen Coefficienten regeln sich nach folgender Proportion:

$$(2) \qquad b_1 : a_1 : c_1 = b_2 : a_2 : c_2 = \frac{2\,i\sqrt{3}}{\sqrt[6]{\Delta}} : -9\sqrt{\pi}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} : \sqrt[6]{\Delta}.$$

Capitel III.

Die vierte Stufe.

§. 1.

Fundamentalpolygon und Moduln*).

Man zählt mod. 4, 24 incongruente Substitutionen ab; es handelt sich also gegenwärtig um ein Fundamentalpolygon von 24 Doppeldreiecken. Unter den 24 Substitutionen sind je 4 mod. 2 einander congruent. Denken wir uns das Polygon also über der Diëderconfiguration, welche die λ-Ebene repräsentirt, ausgebreitet, so wird sie dieselbe vierfach überdecken, sich also als eine vierblätterige Riemann'sche Fläche über der Ebene von λ auffassen lassen. Die Verzweigungspunkte entsprechen dann den Spitzen, mit denen das Polygon die reelle Axe erreicht. In der That, in den bezeichneten drei Punkten, die übrigens die Werthe $\lambda = 0, 1, \infty$ tragen, hängen in der λ-Ebene zwei Dreiecke, im Polygon 4^{ter} Stufe aber vier Dreiecke im Cyclus zusammen, so dass in jedem Verzweigungspunkte der vierfach überdeckten Diëderkugel zwei Blätter zusammenhängen und im Ganzen sechs Verzweigungspunkte auftreten. Das Geschlecht einer Riemann'schen Fläche zählt man nun nach folgender Formel ab:

$$p = -n + 1 + \sum \frac{\nu - 1}{2},$$

wo n die Blätteranzahl, ν die Anzahl der in einem Verzweigungspunkte zusammenhängenden Blätter ist und die Summe über die Verzweigungspunkte zu nehmen ist. Also ist für den gegenwärtigen Fall $p = 0$.

Die Beschreibung des Polygons**) in der ω-Halbebene ist ebenso leicht geleistet. Der einzelne der acht abwechselnd congruenten und symmetrischen Streifen dieser Configuration entsteht durch eine einmalige Spiegelung des beim Polygon 2^{ter} Stufe auftretenden Streifens an der unteren Begrenzung. Hierdurch wird der Kreis $(0, 1/2)$ für den ersten Parallelstreifen des Polygons 4^{ter} Stufe untere Grenze und

*) Wegen der Detailausführung zu vergl. Klein, „Vorl. über d. Ikosaeder" u. Bd. XIV der Annalen, S. 155 ff.

**) Die betreffende Figur wird man leicht mit Hülfe der früheren ergänzen können.

je zwei solche Halbkreise, die einen ganzzahligen Punkt der reellen Axe berühren, decken sich vermöge der vorliegenden Congruenzgruppe.

Der Hauptmodul $o(\omega)$ dieser Stufe sei fixirt durch die Festsetzung:

(1) $$o(0) = 1; \quad o(2) = -1; \quad o(i\infty) = \infty.$$

Die conforme Abbildung des Polygons auf die o-Ebene verwandelt die Kreisbogendreiecke in eben solche mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$. Wie man sich überzeugt, ist eine Ebene gerade durch 48 solche Dreiecke einfach und vollständig überdeckt. Eine passende Uebertragung der o-Ebene auf die Kugel liefert die bekannte octaedrische Theilung derselben. o ist die Octaederirrationalität.

Erinnern wir uns nun, wie am Eingange des Paragraphen die Ebene der Function o als eine vierblätterige Riemann'sche Fläche über der λ-Ebene geschildert wurde. Sie war bei $\lambda = 0, 1, \infty$ verzweigt und es hingen stets zwei Blätter zusammen. Gerade diese Verzweigung weisen auch die Flächen auf, welche durch $\sqrt{\lambda}$ oder $\sqrt{1-\lambda}$ definirt sind und es fragt sich, ob vielleicht diese Wurzeln als eindeutige Functionen des Ortes auf der ersteren vierblätterigen Riemann'schen Fläche aufgefasst werden können.

Die Betrachtung der bezüglichen Polygone in der ω-Halbebene zeigt, dass dem in der That so sei, dass also jene Wurzeln Congruenzmoduln 4^{ter} Stufe seien. Aber wir können auch einen rechnenden Beweis für diese Thatsache geben, der in höheren Fällen, wo eine übersichtliche Anschauung nicht mehr möglich ist, dieselbe ersetzt. Handelt es sich um Entscheidung der entsprechenden Frage, z. B. für die 8^{te} Wurzel aus λ, welche Grösse nach einer oberflächlichen Betrachtung ihrer Verzweigungsart möglicher Weise ein Congruenzmodul 16^{ter} Stufe ist, so zeichnen wir das Polygon dieser Grösse und berechnen aus den sich deckenden Kanten desselben ein System von Erzeugenden der Gruppe von $\sqrt[8]{\lambda}$. Findet sich, dass die Congruenzgruppe 16^{ter} Stufe als Untergruppe in der Gruppe von $\sqrt[8]{\lambda}$ enthalten ist, so ist diese Grösse Congruenzmodul 16^{ter} Stufe *).

Anmerkung. Man fördert durch die soeben skizzirte Methode folgende Resultate: Es sind $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{1-\lambda}$ Moduln 4^{ter} Stufe, $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{1-\lambda}$ 8^{ter} Stufe und $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[8]{1-\lambda}$ Moduln der 16^{ten} Stufe. Hingegen ist $\sqrt[16]{\lambda}$ nicht mehr Congruenzmodul 32^{ter} Stufe. In Bezug auf a ist: $\sqrt[3]{a-1}$, $\sqrt[3]{a-\varrho}$, $\sqrt[3]{a-\varrho^2}$ Moduln 9^{ter} Stufe. $\sqrt[9]{a-1}$ etc. sind wahrscheinlich keine Congruenzmoduln, wenngleich die Rechnung zu complicirt ist, als dass ich mich mit Gewissheit äussern könnte. $\sqrt[3]{\lambda}$ und $\sqrt{a-1}$ sind keine Congruenzmoduln;

*) Weiteres findet man bei Hurwitz, Bd. 18 der Math. Ann., S. 541.

wohl aber haben diese Eigenschaft noch die Producte $\sqrt[3]{\lambda(1-\lambda)}$ und $\sqrt{a^3-1}$ und zwar gehören sie der 6ten Stufe an.

$\sqrt{o}$ ist Modulfunction 8ter Stufe, $\sqrt[4]{o}$ ist nicht Modul 16ter Stufe, welches übrigens in Folge des Zusammenhanges der Grössen o und λ mit dem über λ Gesagten tautologisch ist.

Anhangsweise sei noch bemerkt, dass auch die 5te Wurzel aus der Ikosaederirrationalität nicht mehr Congruenzmodul ist.

Kehren wir nun zu den beiden Grössen $\sqrt{\lambda}$ und $\sqrt{1-\lambda}$ zurück, die in gewohnter Weise k und k' genannt werden mögen, und durch die Festsetzungen:

$$k(1) = 1 \quad \text{und} \quad k'(0) = 1 \tag{1}$$

fixirt sind. Die einzelne Grösse z. B. $k(\omega)$ besitzt ein Polygon von 12 Doppeldreiecken. Ein vorgegebener Werth derselben kehrt also in zwei Punkten des Polygons wieder und die einzelne Grösse k genügt nicht, wie z. B. o, für eine eindeutige Parameterbestimmung auf dem Polygon 4ter Stufe. Aber in den beiden Punkten, die durch einen festen Zahlwerth von k definirt sind, hat die andere Function k' zwei verschiedene Werthe. Es genügt also der Grösse k die andere k' hinzuzugesellen, um die Parameterbestimmung durch beide Grössen eindeutig zu machen.

Indem nun jedem willkürlich fixirten Werthe der einen Grösse zwei Werthe der anderen entsprechen und beide Grössen keineswegs von einander unabhängig variiren, schliessen wir auf die Existenz einer algebraischen Relation zwischen beiden, in welcher jede der Grössen den zweiten Grad nicht übersteigt. Die wirkliche Form dieser Relation ist überaus bekannt:

$$k^2 + k'^2 = 1. \tag{2}$$

Ist ein Werthsystem k, k' dieser Relation gemäss gewählt, so ist dadurch ein und nur ein Punkt des Polygons 4ter Stufe definirt und wir können jede Modulfunction dieser Stufe rational in k, k' darstellen. Insonderheit schliessen wir auf die Existenz folgender Formelsysteme:

$$o(\omega) = r(k, k') \quad \text{und} \quad k = r_1(o); \quad k' = r_2(o),$$

wo die r rationale Functionen bedeuten. Eine leichte Ausrechnung führt uns auf folgende explicite Formeln:

$$o = k' - ik; \quad k = i\,\frac{o^2 - 1}{2o}; \quad k' = \frac{o^2 + 1}{2o}. \tag{3}$$

§. 2.

Die Galois'schen Systeme.

Die Simultanstellung mehrerer Moduln zum Zwecke einer eindeutigen Parameterbestimmung auf Polygonen, für welche wir nun-

mehr ein erstes Beispiel kennen gelernt haben, ist für die Folge von fundamentaler Bedeutung und ich benutze daher die Gelegenheit, einige allgemeine Bemerkungen darüber einzuschalten. War es in dem eben betrachteten Falle nicht unbedingt nöthig, das System zweier Grössen k, k' zur eindeutigen Parameterdarstellung zu verwenden, könnten wir vielmehr mit der einzigen Grösse o reichen, so ändert sich dieses von nun an. Die weiterhin auftretenden Flächen sind nicht mehr vom Geschlecht $p = 0$, lassen sich also nicht mehr eindeutig auf eine einzelne complexe Ebene beziehen. Man benöthigt dann mehrere sagen wir ν Moduln $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\nu$ zur eindeutigen Parameterdarstellung auf dem Polygon. Wir wollen in der Folge ein solches System ein Galois'sches Modulsystem nennen. Jede der Grössen φ_i erreicht einen beliebig fixirten Zahlwerth in m_i Punkten des Polygons und die m sind dann sämmtlich grösser als 1.

φ_1 ist also eine algebraische Function auf der Riemann'schen Fläche, welche einen festen Zahlwerth in m_1 Punkten annimmt. Betrachten wir nun das Verhalten von φ_2 in diesen m_1 Punkten. Entweder kann es eintreten, dass φ_2 in den m_1 Punkten auch m_1 verschiedene Zahlwerthe annimmt; dann wird unter den m_1 Punkten durch Hinzusetzen des Werthes von φ_2 ein einzelner völlig charakterisirt und die Simultanstellung von zwei zusammengehörigen Werthen φ_1, φ_2 genügt, von wenigen singulären Stellen abgesehen, zur eindeutigen Darstellung der Punkte der Riemann'schen Fläche. Zugleich ist deutlich, dass φ_1 und φ_2 nicht von einander unabhängig sind, vielmehr in einem algebraischen Zusammenhange mit einander stehen, also eine algebraische Relation mit einander eingehen, in der sie beziehungsweise bis zu den Graden m_2 und m_1 aufsteigen.

Andererseits kann es vorkommen, dass in den m_1 genannten Punkten φ_2 nur $\frac{m_1}{2}$ oder $\frac{m_1}{3}$ etc. verschiedene Werthe annimmt, so dass durch Hinzusetzung eines derselben noch zwei oder drei etc. Punkte des Polygons charakterisirt sind. Will man eindeutige Darstellung, so benöthigt man noch weitere Grössen, sagen wir gleich im Ganzen ν Grössen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\nu$, so dass nun ein zusammengehöriges Werthsystem $\varphi_1 \ldots \varphi_\nu$ einen Punkt des Polygons eindeutig bestimmt. Irgend zwei der φ bilden dann wieder eine algebraische Relation und es ist leicht ersichtlich, dass so insgesammt $\nu - 1$ unabhängige Relationen bestehen.

Fasst man die ν Functionen φ als nicht homogene Coordinaten eines Raumes von ebenso viel Dimensionen auf, so bedeuten die $\nu - 1$ Gleichungen eine in demselben gelegene Curve, welche vermöge der Bedeutung der φ eindeutig auf das zu Grunde liegende Fundamentalpolygon bezogen ist.

Wie wir nun jede Modulfunction der betrachteten Stufe als eindeutige Function des Ortes auf dem Polygone ansehen, ebensogut kön-

nen wir sie auch als rationale Function auf der beschriebenen algebraischen Curve betrachten, da sie durch die ν Grössen φ rational muss dargestellt werden können.

Betrachten wir noch die Wirkung linearer ω-Substitutionen auf jene Curve. Mit $\varphi(\omega)$ ist auch $\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$ Congruenzmodul n^{ter} Stufe; mithin ist das linear-transformirte φ_i eindeutig darstellbar durch die ursprünglichen $\varphi_1 \varphi_2 ..$

$$\varphi_i\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = r_i(\varphi_1, \varphi_2 .. \varphi_\nu); \quad i = 1, 2 .. \nu.$$

r bedeutet dabei eine rationale Function. Geometrisch gesprochen heisst dieses aber, man soll eine rationale Transformation der Coordinaten vornehmen, oder falls man das Coordinatensystem ungeändert lässt, man solle die Curve durch jene Gleichungen auf eine andere Curve eindeutig beziehen. Aber die neue Curve zwischen den $\varphi_i\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$ ist doch dieselbe wie die ursprüngliche; denn die Relationen zwischen den φ_i gelten für jedes ω. Transformationen, die der Identität (mod. n) congruent sind, lassen aber nun die φ insgesammt ungeändert, während dieses von keiner der N incongruenten Substitutionen gelten kann, weil die φ sonst kein vollständiges Parametersystem für das Polygon abgeben würden. Mithin sprechen wir schliesslich den Satz aus: Die Curve der φ lässt sich auf N Weisen eindeutig in sich selbst transformiren (cf. S. 8).

§. 3.

Zusammenhang der Octaederirrationalität mit transformirten Moduln, die der 4^{ten} Stufe angehören.

Kehren wir nun speciell zur 4^{ten} Stufe zurück, so haben wir zuvörderst Transformation 4^{ten} Grades auf $J(\omega)$ anzuwenden und die sechs dadurch entstehenden adjungirten Moduln 4^{ter} Stufe rational in o darzustellen. Eine Methode, die von der oben beschriebenen in keiner Weise abweicht, führt auf die Formeln:

$$J\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{[(1-o)^8 - 16(1-o^2)^4 + 16(1+o)^8]^3}{864\, o(1-o)^{16}(1+o)^4(1+o^2)};$$

(1)

$$J(4\omega) = \frac{(1 - 16\, o^4 + 16\, o^8)^3}{108\, o^4 (o^4 - 1)}; \text{ etc.}$$

Im Sinne des vorhergehenden Paragraphen kann man hier den Satz aussprechen: Die sechs adjungirten Repräsentanten der transformirten

J bilden ein Galois'sches System 4^{ter} Stufe, so dass es möglich ist, das gegebene Formelsystem zu invertiren, d. h. o als rationale Function jener sechs Grössen zu berechnen. Ein Gleiches gilt überhaupt von derartigen Formelsystemen, mit alleiniger Ausnahme gewisser in der 8^{ten} und 16^{ten} etc. Stufe auftretender Systeme, worüber an Ort und Stelle eingehender zu referiren ist.

Neben die J treten nun diejenigen Moduln 4^{ter} Stufe, welche durch Transformation 2^{ter} Ordnung aus $\lambda(\omega)$ hervorgehen. Es sind die drei Grössen $\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega+1}{2}\right)$, $\lambda(2\omega)$. Die Bilder ihrer Ebenen finden sich auf dem Octaeder je viermal und die specielle Verzweigungsart der einzelnen Functionen führt für dieselben auf folgende rationale Darstellungen:

$$(2)\qquad \lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{(o-1)^4}{8o(1+o^2)};\quad \lambda\left(\frac{\omega+1}{2}\right) = \frac{(io+1)^4}{8io(1-o^2)};$$
$$\lambda(2\omega) = 1 - o^4.$$

Führt man statt λ die mit ihr äquivalente Function $1-\lambda$ als Hauptmodul 2^{ter} Stufe ein, so ist direct

$$\lambda(2\omega) = o^4.$$

Hierdurch ist die in der Anmerkung (S. 28) gemachte Bemerkung gerechtfertigt, dass mit $\sqrt[16]{\lambda}$ auch $\sqrt[4]{o}$ aufhört, Congruenzmodul zu sein. Die Inversion der drei Formeln (2) ist hier leicht explicit ausgeführt. Man findet:

$$(3)\qquad o = \frac{4 - 5\lambda(2\omega)}{2\lambda(2\omega)\left\{\left[2\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)-1\right] - i\left[2\lambda\left(\frac{\omega+1}{2}\right)-1\right]\right\}}.$$

§. 4.

Die Verbindung von o mit den $\sigma_{\lambda,\mu}$.

Die Formel (2) des vorhergehenden Paragraphen

$$1 - \lambda(2\omega) = o^4$$

würde uns eine einfache Darstellung der Octaederirrationalität durch einen transformirten zweiten σ-Theilwerth liefern, der auch eine bequeme analytische Darstellung dieser Grösse ermöglicht. Dagegen würden die ursprünglichen zweiten Theilwerthe nicht mit gleicher Einfachheit für diesen Zweck verwandt werden können, da zu dem Ende an die Formel

$$o = k' - ik$$

angeknüpft werden müsste.

Aber die nicht transformirten vierten σ-Theilwerthe sind Grössen, die zu dem o eine nahe und interessante Beziehung zeigen. Sie selbst sind Moduln 32^{ter} Stufe und ihre achten Potenzen solche der vierten. Die Anzahl der verschiedenen Theilwerthe ist 6; wir können sie in folgender Weise auswählen: σ_{10}, σ_{12}, σ_{01}, σ_{21}, σ_{11}, σ_{31}. Als Zusatzfactor bei nicht homogener Darstellung der achten Potenzen benutzt man mit Vortheil g_2^2. Das Resultat der Untersuchung ist dann dieses:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma_{10}{}^8 \cdot g_2^2 &= \frac{(o^8 + 14o^4 + 1)^2}{9o^4(o^4 - 1)^3},\\
\sigma_{12}{}^8 \cdot g_2^2 &= -\frac{(o^8 + 14o^4 + 1)^2}{9(o^4 - 1)^3},\\
\sigma_{01}{}^8 \cdot g_2^2 &= \frac{1}{2}\frac{(o^8 + 14o^4 + 1)^2}{9o^3 \cdot (o + 1)^4 (o^2 + 1)^3},\\
\sigma_{21}{}^8 \cdot g_2^2 &= -\frac{1}{2}\frac{(o^8 + 14o^4 + 1)^2}{9o^3 (o - 1)^4 (o^2 + 1)^3},\\
\sigma_{11}{}^8 \cdot g_2^2 &= -\frac{i}{2}\frac{(o^8 + 14o^4 + 1)^2}{9o^3 (1 - io)^4 (1 - o^2)^3},\\
\sigma_{31}{}^8 \cdot g_2^2 &= \frac{i}{2}\frac{(o^8 + 14o^4 + 1)^2}{9o^3 (1 + io)^4 (1 - o^2)^3}.
\end{aligned}\right.$$

Ueber die Methode der Gewinnung dieser Formeln sei nur die folgende Bemerkung gestattet: Die Invariante g_2 verschwindet im Inneren des Polygons überall da, wo drei Dreiecke mit einander zusammenhängen. Da somit die directe Aufsuchung der Werthevertheilung obiger Producte auf minder glatte Rechnungen führen würde, so wählt man passend den Umweg über die Discriminante. $\sqrt[12]{\Delta}$ ist $(-1)^{\text{ster}}$ Dimension; also ist $\left(\sqrt[3]{\Delta}\right)^2$ $(-8)^{\text{ter}}$ Dimension und $\sigma_{\lambda\mu}{}^8 \left(\sqrt[3]{\Delta}\right)^2$ allein von ω abhängig. Indessen ist doch $\sqrt[3]{\Delta}$ nur ein Modul dritter Stufe und also muss man vorläufig, um rationale Darstellung in o zu erhalten, jenes Product noch zur dritten Potenz erheben. Dann kann man explicite angeben:

$$\sigma_{\lambda\mu}{}^{24} \cdot \Delta^2 = rat(o),$$

wie man z. B. ohne Mühe zeigt, dass:

$$(2)\qquad \sigma_{10}{}^{24} \Delta^2 = \frac{16}{o^4(o^4 - 1)}.$$

Nun ist aber $\Delta^2 = \frac{g_2^6}{J^2}$ und der Zusammenhang von J und o gegeben durch die Octaedergleichung:

$$J : J - 1 : 1 = (o^8 + 14o^4 + 1)^3 : (o^{12} - 33o^8 - 33o^4 + 1)^2 : 108o^4(o^4 - 1)^4.$$

Also ist:

$$\sigma_{10}{}^8 \cdot g_2^2 = \sqrt[8]{J^2 rat\,(o)};$$

Der Radikand findet sich auch in der That als dritte Potenz eines rationalen Ausdruckes von o und führt durch richtige Wahl der vortretenden dritten Einheitswurzel auf oben angegebenes Formelsystem.

Ein Formenproblem $o = \frac{o_1}{o_2}$ fixirt man in Folge der Gestalt obiger Gleichungen sofort durch folgende Festsetzung:

$$g_2^2 = \frac{(o_1^8 + 14\, o_1^4 o_2^4 + o_2^8)^2}{18\, o_1^3 o_2^3 (o_1^4 - o_2^4)^3}. \tag{3}$$

Die Einführung von o_1, o_2 giebt nach leichter Umrechnung folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
\sigma_{10}{}^8 &= 2\frac{o_2^3}{o_1}, & \sigma_{12}{}^8 &= -2\frac{o_1^3}{o_2}, \\
\sigma_{01}{}^8 &= \frac{(o_1 - o_2)^3}{o_1 + o_2}, & \sigma_{21}{}^8 &= -\frac{(o_1 + o_2)^3}{o_1 - o_2}, \\
\sigma_{11}{}^8 &= i\frac{(o_1 - i o_2)^3}{o_1 + i o_2}, & \sigma_{31}{}^8 &= -i\frac{(o_1 + i o_2)^3}{o_1 - i o_2},
\end{aligned} \tag{4}$$

d. h. die sechs $\sigma_{\lambda\mu}{}^8$ sind die dritten Potenzen einer Octaederecke dividirt durch die gegenüberliegende.

Die Formelgruppen sind natürlich wieder invertirbar.

Zwischen den $\sigma_{\lambda\mu}{}^8$ bestehen ternäre Relationen fünften Grades, deren Formen indessen ziemlich complicirt sind. Einfach werden folgende fundamentale Relationen:

$$\begin{gathered}
(\sigma_{11}{}^8 + \sigma_{31}{}^8)(\sigma_{21}{}^8 + \sigma_{01}{}^8) = 16\,\sigma_{10}{}^8 \sigma_{12}{}^8; \\
(\sigma_{10}{}^8 + \sigma_{12}{}^8)(\sigma_{11}{}^8 + \sigma_{31}{}^8) = 16\,\sigma_{01}{}^8 . \sigma_{21}{}^8; \\
(\sigma_{01}{}^8 + \sigma_{21}{}^8)(\sigma_{10}{}^8 + \sigma_{12}{}^8) = 16\,\sigma_{11}{}^8 . \sigma_{31}{}^8; \\
\sigma_{11}{}^8 . \sigma_{31}{}^8 + \sigma_{01}{}^8 . \sigma_{21}{}^8 + \sigma_{10}{}^8 \sigma_{12}{}^8 = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sigma_{11}{}^8 + \sigma_{31}{}^8} + \frac{1}{\sigma_{01}{}^8 + \sigma_{21}{}^8} + \frac{1}{\sigma_{10}{}^8 + \sigma_{12}{}^8} = 0.$$

§. 5.

Darstellung der 4ten p-Theilwerthe durch o.

Ich erledige auch noch die zu dieser Stufe gehörigen Theilwerthe der p-Function, deren Anzahl sich wieder auf 6 reducirt und die analog durch $p_{\lambda\mu}$ bezeichnet werden mögen.

Die gewünschten Darstellungen in o fliessen aus den im §. 4 des Cap. I. gegebenen Formeln im Verein mit der bekannten Gleichung:

$$p(2u) = \frac{[p^2(u) + {}^1/_4 g_2]^2 + 2 g_3 p(u)}{4 p^3(u) - g_2 p(u) - g_3}.$$

Ist $p(2u)$ gegeben, so sind die vier Wurzeln der Gleichung 4^{ten} Grades für $p(u) : p(u)$, $p\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)$, $p\left(u + \frac{\omega_2}{2}\right)$, $p\left(u + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$. Ist also $u = \frac{\omega_1}{4}$ und $p(u) = x$, so sind die vier Wurzeln der Gleichung:

$$(2) \quad (x^2 + {}^1/_4 g_2)^2 + 2 g_3 x - p\left(\frac{\omega_1}{2}\right)(4x^3 - g_2 x - g_3) = 0,$$

die Grössen $p\left(\frac{\omega_1}{4}\right)$, $p\left(\frac{3\omega_1}{4}\right)$, $p\left(\frac{\omega_1 + 2\omega_2}{4}\right)$, $p\left(\frac{3\omega_1 + 2\omega_2}{4}\right)$. Die Substitution $x = \frac{g_3}{g_2} \cdot z$ führt auf eine Gleichung nullter Dimension:

$$(3) \quad z^4 - z^3\, 12\, \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda^2 - \lambda - 2} + z^2\, \frac{27}{2}\, \frac{J}{J - 1} + \cdots = o,$$

die offenbar zwei Paare gleicher Wurzeln hat, da $p\left(\frac{\omega_1}{4}\right) = p\left(\frac{3\omega_1}{4}\right)$ und $p\left(\frac{\omega_1 + 2\omega_2}{4}\right) = p\left(\frac{3\omega_1 + 2\omega_2}{4}\right)$. Sind z_1 und z_2 die beiden verschiedenen Wurzeln von (3), so ist:

$$(4) \quad z_1 + z_2 = 6\, \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda^2 - \lambda - 2} = a$$

und

$$z_1^2 + 4 z_1 z_2 + z_2^2 = \frac{27}{2}\, \frac{J}{J - 1} = b.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt:

$$2 z_i = a + \sqrt{3a^2 - 2b}; \quad 2 z_k = a - \sqrt{3a^2 - 2b}.$$

Die z bleiben bei der Substitution S ungeändert. Schreibt man also rechts statt a und b, deren rationale Ausdrücke in $\tau = o^4$, so müssen die Quadratwurzeln bis auf etwaige numerische Irrationalitäten fortfallen. Es sind aber:

$$a = 6\, \frac{\tau^2 + 14\tau + 1}{\tau^2 - 34\tau + 1}; \text{ und } b = \frac{27}{2} \cdot \frac{(\tau^2 + 14\tau + 1)^3}{(\tau^2 - 34\tau + 1)^2}\, \frac{1}{(\tau + 1)^2};$$

wodurch in der That die Quadratwurzeln sich aufheben und folgendes Resultat erscheint:

$$(5) \quad p\left(\frac{\omega_1}{4}\right) \cdot \frac{g_2}{g_3} = \frac{3}{2}\, \frac{o^8 + 14 o^4 + 1}{o^8 - 34 o^4 + 1} \cdot \frac{5 - o^4}{o^4 + 1}; \text{ etc.}$$

Als die geeignetste Theilung des o in den Quotienten $\frac{o_1}{o_2}$ empfiehlt sich die der Gleichung:

$$(6) \qquad -\frac{2g_2}{3g_3} = \frac{o_1^8 + 14\,o_1^4 o_2^4 + o_2^8}{o_1^{12} - 33\,o_1^8 o_2^4 - 33\,o_1^4 o_2^8 + o_2^{12}}$$

entsprechende.

Dann kommt:

$$(7)\quad \begin{aligned} &p\left(\frac{\omega_1}{4}\right) = o_1^4 - 5\,o_2^4; && p\left(\frac{\omega_1+2\omega_2}{4}\right) = -5\,o_1^4 + o_2^4;\\ &p\left(\frac{\omega_2}{4}\right) = (o_1-o_2)^4 - 2\,o_1 o_2 (o_1^2+o_2^2); && p\left(\frac{2\omega_1+\omega_2}{4}\right) = (o_1+o_2)^4 \\ &&& \quad + 2\,o_1 o_2 (o_1^2+o_2^2);\\ &p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\right) = (o_1 - i\,o_2)^4 - 2\,i\,o_1 o_2 (o_1^2 - o_2^2); && p\left(\frac{3\omega_1+\omega_2}{4}\right) = (o_1+i\,o_2)^4 \\ &&& \quad + 2\,i\,o_1 o_2 (o_1^2 - o_2^2). \end{aligned}$$

Ich notire noch folgende aus dem vorigen Paragraphen resultirende Verwandtschaft mit den $\sigma_{\lambda\mu}$ gleichen Theilungsgrades.

$$(8)\quad \begin{aligned} \frac{p_{12}}{p_{10}} &= \frac{5\,\sigma_{12}^8 + \sigma_{10}^8}{\sigma_{12}^8 + 5\,\sigma_{10}^8};\\ \frac{p_{21}}{p_{01}} &= \frac{5\,\sigma_{21}^8 + \sigma_{01}^8}{\sigma_{21}^8 + 5\,\sigma_{01}^8};\\ \frac{p_{13}}{p_{11}} &= \frac{5\,\sigma_{13}^8 + \sigma_{11}^8}{\sigma_{13}^8 + 5\,\sigma_{11}^8}. \end{aligned}$$

§. 6.

Zusammenhang der Formenprobleme.

Als fundamentales Formensystem werden wir auch hier wieder

$$(1) \qquad o_1 = \frac{o\,\omega_1}{\sqrt{\frac{do}{d\omega}}}, \qquad o_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{do}{d\omega}}}$$

proclamiren. Der Zusammenhang desselben mit $\sigma_{\lambda\mu}$ ist leicht anzugeben. $\left(\frac{o_2}{\sigma_{10}}\right)^8$ ist nullter Dimension und bleibt bei der Substitution S erhalten, ist also rational in $o^4 = x$. Da die Null- und Unstetigkeitspunkte wieder in den Spitzen des Polygons liegen, so gilt der Ansatz:

$$\left(\frac{o_2}{\sigma_{10}}\right)^8 = c\,x^\alpha (x-1)^\beta = r(o),$$

der durch Annäherung an den Punkt ∞ sofort folgende specielle Form annimmt:

$$\left(\frac{o_2}{\sigma_{10}}\right)^8 = 2^8 \cdot \pi^4 \cdot \frac{x^\alpha}{(x-1)^{\alpha+1}}$$

Durch die Substitution T findet man aber daraus:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-2}}\right)^8 \cdot \left(\frac{o_1 - o_2}{\sigma_{01}}\right)^8 = r\left(\frac{o+1}{o-1}\right);$$

und durch Division der beiden letzten Gleichungen unter Benutzung des Ausdruckes $\left(\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{10}}\right)^8$ in o ergiebt sich für r folgende Functionalgleichung:

$$(o^2 - 1)\,(o-1)^4\, r(o) = 8\, o\, r\left(\frac{o+1}{o-1}\right).$$

Dieselbe giebt sofort $\alpha = 0$, so dass

$$\left(\frac{o_2}{\sigma_{10}}\right)^8 = \frac{2^8 \pi^4}{o^4 - 1} \tag{2}$$

ist.

Ich übergehe die weitere Rechnung, um sogleich folgendes Resultat anzugeben: $\mu_1\, \mu_2$ bezichungsweise $\nu_1\, \nu_2$ seien die Theilungen, welche die σ- beziehungsweise p-Theilwerthe darstellten, dann ist μ_i von 4^{ter} Dimension, ν_i aber von $(-\,{}^1/_2)^{\text{ter}}$. Beide weichen wieder von dem normalen Systeme $o_1\, o_2$ nur um Δ-Factoren ab, wie man aus folgender Proportion ersehen möge:

$$\mu_1 : o_1 : \nu_1 = \mu_2 : o_2 : \nu_2 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt[4]{\Delta}} : 2\sqrt{\pi} : \frac{\varepsilon_2}{\sqrt[4]{12}}\sqrt[8]{\Delta}; \tag{3}$$

die ε bedeuten dabei Einheitswurzeln, deren Kenntniss nicht weiter interessirt.

Capitel IV.

Die sechste Stufe.

§. 1.

Eintheilung der Substitutionen $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ in Bezug auf die ganze Zahl 6*).

Die lineare Gruppe, (mod. 6) genommen, reducirt sich auf die endliche Zahl von 72 einander incongruenten Substitutionen. In der Absicht, die Structur der so entspringenden endlichen Gruppe später als bekannt vorauszusetzen, gebe ich hier zunächst eine Aufzählung sämmtlicher in derselben enthaltener Untergruppen. Ich nenne dabei zwei Substitutionen U und V gleichberechtigt, wenn die eine aus der anderen durch Transformation hervorgeht, d. h. wenn eine dritte Substitution T existirt, welche der Bedingung $U = T^{-1} . V . T$ genügt. Entsprechend heissen zwei Untergruppen gleichberechtigt, wenn die Substitutionen der einen durch Transformation vermöge einer und derselben Substitution T aus den Substitutionen der anderen Untergruppe hervorgehen. Dieses vorausgesetzt, haben wir zunächst folgende cyclische Untergruppen:

1) 12 gleichberechtigte G_6**), z. B.:

$$\omega' \equiv 1 + \omega, \quad \omega' \equiv 2 + \omega, \quad \omega' \equiv 3 + \omega \text{ etc.}$$

2) 3 gleichberechtigte cyclische G'_6, z. B.:

$$\omega' \equiv \frac{1}{3 - \omega}, \quad \omega' \equiv \frac{3 + \omega}{4 + 3\omega}, \quad \omega' \equiv \frac{2 + 3\omega}{3 + 4\omega}, \quad \omega' \equiv \frac{3 + 2\omega}{5 + 3\omega},$$

$$\omega' \equiv \frac{1 + 3\omega}{-\omega}, \quad \omega' \equiv \omega.$$

---

*) Die Zerlegung der den vorigen Capiteln zu Grunde liegenden Diëder-, Tetraëder- und Octaëdergruppe findet man bei Klein in den „Vorlesungen über das Ikosaëder“. Die Kenntniss der im gegenwärtigen Paragraphen mitgetheilten Zerlegung verdanke ich zum Theil einer brieflichen Mittheilung des Herrn Gierster.

**) Der untere Index bedeutet die Ordnung der Gruppe; ein oberer Index soll nur zur Unterscheidung von Untergruppen gleicher Ordnung gebraucht werden.

3) 4 gleichberechtigte Cyclen G_3, z. B.:

$$\omega' \equiv 2 + \omega, \quad \omega' \equiv 4 + \omega, \quad \omega' \equiv \omega.$$

Je eine dieser G_3 ist in drei der unter 1 genannten G_6 enthalten.

4) Eine ausgezeichnete cyclische G'_3, nämlich:

$$\omega' \equiv \frac{3 + \omega}{4 + 3\omega}, \quad \omega' \equiv \frac{3 + 2\omega}{5 + 3\omega}, \quad \omega' \equiv \omega.$$

Diese G'_3 ist in jeder G'_6 enthalten.

5) 8 gleichberechtigte G''_3, z. B.:

$$\omega' \equiv \frac{1}{1 - \omega}, \quad \omega' \equiv \frac{-1 + \omega}{\omega}, \quad \omega' \equiv \omega.$$

6) 3 gleichberechtigte G_2, deren jede in vier verschiedenen G_6 enthalten ist, z. B.:

$$\omega' \equiv 3 + \omega, \quad \omega' \equiv \omega.$$

7) 3 gleichberechtigte G'_2 in den 3 G'_6 enthalten, z. B.:

$$\omega' \equiv \frac{2 + 3\omega}{3 + 4\omega}, \quad \omega' \equiv \omega.$$

8) 9 gleichberechtigte G''_2, z. B.:

$$\omega' \equiv -\frac{1}{\omega}, \quad \omega' \equiv \omega.$$

An nicht cyclischen Untergruppen sind zu nennen:

I. Eine ausgezeichnete G_{36} (enthaltend die drei Cyclen G'_6 und sämmtliche cyclische Untergruppen 3^{ter} Ordnung). Innerhalb dieser Untergruppe sind vier verschiedene G_{12} enthalten, nämlich:
   1. Eine ausgezeichnete G'_{12} (enthaltend die drei Cyclen G'_6).
   2. Eine ausgezeichnete Tetraëdergruppe G''_{12} [alle Substitutionen enthaltend, welche bereits (mod. 2) der Identität congruent sind].
   3. Zwei gleichberechtigte Tetraëdergruppen $G^{(3)}{}_{12}$, $G^{(4)}{}_{12}$ (einzeln je 4 G''_3, gemeinsam die drei G'_2).
   4. Eine ausgezeichnete Vierergruppe G_4 (die drei Cyclen G'_2), welche den vier eben genannten $G^{(i)}{}_{12}$ gemeinsam ist.
   5. Vier gleichberechtigte G_9 (deren jede eine G_3, die ausgezeichnete G'_3 und je zwei G''_3 enthält).

II. Eine ausgezeichnete G_{24} (die drei G'_8 und alle cyclischen Untergruppen zweiter Ordnung). In dieser G_{24} sind ausser den schon genannten G'_{12} und G_4 noch folgende Untergruppen:
   1. Drei gleichberechtigte $G^{(i)}{}_{12}$ ($i = 5, 6, 7$). (Jede enthält eine G'_6, die drei G_2 und je drei G''_2).
   2. Drei gleichberechtigte $G^{(i)}{}_{12}$ ($i = 8, 9, 10$). (Jede enthält eine G'_6 im Verein mit sechs bestimmten G''_2).

3. Drei gleichberechtigte G_8 (je eine G_2, die drei G'_2 und je drei G''_2).
4. Eine ausgezeichnete Diëdergruppe G''_6 [mit allen Substitutionen, die (mod. 3) der Identität congruent sind].
5. Drei gleichberechtigte $G^{(i)}{}_6$ ($i = 3, 4, 5$). (Jede enthält drei G''_2, alle die ausgezeichnete G'_3).
6. Neun gleichberechtigte Vierergruppen $G^{(i)}{}_4$ ($i = 1 \ldots 9$), z. B.:

$$\omega' \equiv \frac{\omega}{1 + 3\omega}, \quad \omega' \equiv \frac{2 + \omega}{5 + 2\omega}, \quad \omega' \equiv \frac{2 + \omega}{5 + 5\omega}, \quad \omega' \equiv \omega.$$

7. Neun gleichberechtigte Vierergruppen $G^{(i)}{}_4$ ($i = 10 \ldots 18$), z. B.:

$$\omega' \equiv \frac{-1}{\omega}, \quad \omega' \equiv \frac{2 + \omega}{5 + 2\omega}, \quad \omega' \equiv \frac{5 + 2\omega}{4 + 5\omega}, \quad \omega' \equiv \omega.$$

III. Drei gleichberechtigte $G^{(i)}{}_{24}$ ($i = 1, 2, 3$). (Die einzelne enthält vier G_6, drei G''_2; gemeinsam sind die drei G'_2).

Die weiter sich anreihenden Untergruppen sind sämmtlich schon genannt.

IV. Vier gleichberechtigte G_{18} (je drei G_6, je zwei G''_3 und die G'_3).

Die in den G_{18} enthaltenen Untergruppen sind auch bereits oben genannt. Weitere Untergruppen existiren nicht.

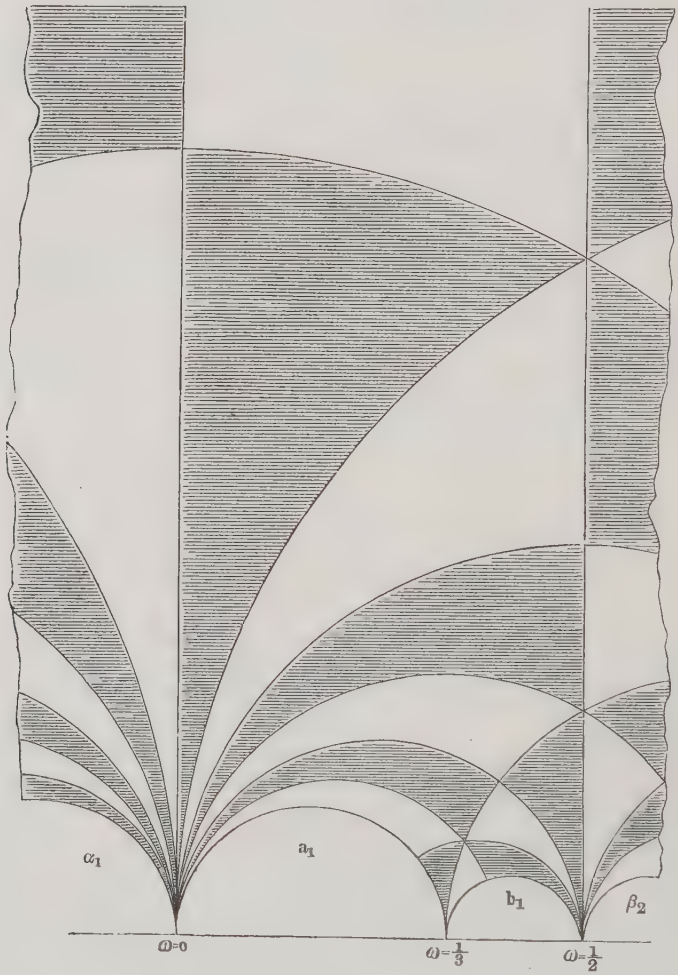
§. 2.

Das Fundamentalpolygon sechster Stufe.

Es handelt sich gegenwärtig um ein Polygon von 72 Doppeldreiecken, das in 12 abwechselnd symmetrische und congruente Streifen zerfällt. Ein einzelner von diesen Streifen wird also 12 Elementardreiecke enthalten. Wir können auch leicht die Gruppirung derselben angeben, indem wir auf die Polygone der zweiten und der dritten Stufe recurriren. Offenbar sind alle ω-Werthe, welche bezüglich des Polygones 6^{ter} Stufe einander äquivalent sind, sowohl in Bezug auf das Polygon der zweiten, wie das der dritten Stufe äquivalent und zugleich erhalten wir in allen Punkten, welche die beiden letzten Bedingungen erfüllen, sämmtliche Punkte, welche der ersten Anforderung genügen. Wir können somit beispielsweise anhebend vom Polygon dritter Stufe folgenden Satz aussprechen: Das fragliche Polygon der 6^{ten} Stufe besteht aus einem Complex mit einander zusammenhängender Polygone 3^{ter} Stufe, die so gewählt sind, dass die homologen Punkte von irgend zweien dieser Polygone nicht zugleich in Bezug auf die Congruenzgruppe 2^{ter} Stufe einander äquivalent sind, dass indessen jedes neue Bild des Polygones 3^{ter} Stufe einem der ausgewählten zugleich in

Bezug auf das Polygon 2ter Stufe Punkt für Punkt entspricht. Man wird auf folgende Figur (Fig. 5) geführt, die einen einzelnen Parallelstreifen darstellt. Nennen wir die freien Kreisbogen a_1, b_1, die symmetrischen des links daneben liegenden Streifens α_1 β_1 und braucht

Fig. 5.



für die damit congruenten Bogen, welche die nach rechts hin folgenden Parallelstreifen begrenzen, die entsprechende Bezeichnung mit den Indices 2, 3, . . 6, so ist der Kantenzusammenhang dargestellt durch a_ν — α_ν, b_ν — $\beta_{\nu+4}$, wo die Indices nur (mod. 6) zu nehmen sind.

Nach den erwähnten Beziehungen des vorliegenden Polygones zu denjenigen der 2^{ten} und 3^{ten} Stufe können wir dasselbe auch als eine mehrblätterige Riemann'sche Fläche auffassen, die entweder über der Diëderconfiguration (λ-Ebene) oder über der tetraëdrisch getheilten Kugel (Ebene der Tetraëderirrationalität) gelagert ist. Dabei ist die erstgenannte Fläche 12-blätterig und über den Punkten $\lambda = 0, 1, \infty$ (Punkten $J = \infty$) verzweigt, die letztere 6-blätterig und über den vier Ecken des Tetraëders verzweigt. Hier schliesse sich auch noch die 72-blätterige Fläche über der J-Ebene an, die in bekannter Weise bei $J = 0, 1, \infty$ verzweigt ist.

Es ist schliesslich hier der Ort, das Geschlecht dieser Riemann'schen Flächen zu bestimmen. Man findet nach der bereits oben genannten Formel:

$$p = -n + 1 + \sum \frac{\nu - 1}{2}$$

für den vorliegenden Fall $p = 1$, ein für den Fortgang der Entwickelung fundamentales Resultat.

§. 3.

Das Integral erster Gattung.

Anknüpfend an das eben erhaltene Resultat, dass der Fall der 6^{ten} Stufe zum Geschlecht $p = 1$ gehört, formuliren wir zunächst folgenden wichtigen Satz: Auf den geschilderten Riemann'schen Flächen existirt eine überall endliche Function $u(\omega)$, das elliptische Integral erster Gattung, die auf der zerschnittenen Fläche eindeutig ist, sich aber beim Ueberschreiten von Querschnitten, allgemein gesagt, um Multipla zweier Perioden Ω_1, Ω_2 ändert. Da wir als zerschnittene Riemann'sche Fläche das Polygon in der ω-Halbebene ansprechen können, so ist $u(\omega)$ eine eindeutige, nicht algebraische Modulfunction, die sich bei den Substitutionen der Congruenzgruppe 6^{ter} Stufe allgemein um Multipla der beiden Grössen Ω_1, Ω_2 ändert.

Zum Zwecke späterer Anwendungen betrachte ich hier noch das Verhalten von $u(\omega)$ gegenüber beliebigen linearen ω-Substitutionen*). Sind zwei Substitutionen (mod. 6) einander congruent, so unterscheiden sich die Resultate ihrer Anwendungen auf $u(\omega)$ nur um Multipla der Perioden Ω_1, Ω_2. Nehmen wir daher die Transformationen von u nur (mod. Ω_1, Ω_2), so brauchen wir nur die 72 incongruenten Substitutionen des ω in ihrer Wirkung auf u zu untersuchen. Die Trans-

*) cf. Klein, „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale", S. 67.

formationen des $u(\omega)$ können nun, wie man weiss, überhaupt nur eine der folgenden Formen annehmen. Erstens im allgemeinen Falle:

$$u' = \pm u + C,$$

zweitens, wenn die Invariante g_3 des elliptischen Gebildes verschwindet:

$$u' = \pm i u + C,$$

drittens, wenn die Invariante g_2 verschwindet:

$$u' = \varepsilon^\nu u + C$$

$$\varepsilon = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

C ist eine willkürliche Constante und ν eine ganze Zahl. Unter diesen ∞^1 eindeutigen Beziehungen der Fläche vom Geschlecht 1 auf sich selbst sind auch die 72 Verschiebungen unseres Polygons in sich enthalten und es muss somit gelingen, sofern wir die Transformationen des u nur (mod. Ω_1 Ω_2) nehmen, aus obigem Material eine Gruppe von 72 Transformationen zusammenzusetzen, welche der in §. 1 dieses Capitels zerlegten Gruppe holoëdrisch isomorph ist. Die Betrachtung zeigt, dass dieses wesentlich*) nur in einer Weise geschehen kann, indem man nämlich den erzeugenden Substitutionen S und T die folgenden u-Transformationen entsprechend setzt:

$$u(\omega + 1) = \varepsilon u(\omega); \quad u\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -u - \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{6}.$$

Hieraus setzt sich in der That die geforderte Gruppe der 72 u-Transformationen zusammen und wir finden das wichtige Resultat, dass im gegenwärtigen Fall die Invariante g_2 verschwindet, derselbe also der äquianharmonische ist. Sämmtliche Substitutionen sind enthalten in der allgemeinen Form:

$$u' = \varepsilon^\nu u + \frac{\alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2}{6}.$$

Um sie speciell zu charakterisiren, setze man für ν jedesmal die Reihe der ganzen Zahlen 0, 1, 2 . . 5. Dann finden sich folgende Typen von Periodensechsteln:

$$u' = \varepsilon^\nu u \pm \frac{4\Omega_i + \Omega_k}{6} \left(i, k = \begin{matrix}1, 2\\ 2, 1\end{matrix}\right),$$

deren Zahl 24 beträgt, ausserdem aber:

---

*) Es bleibt offenbar noch die Willkürlichkeit offen, dass man statt u eines der ∞^1 verschiedenen einführt, in welche es transformirt werden kann. Im Texte ist darüber in passender Weise verfügt, indem insbesondere

$$u(i\infty) = 0$$

angenommen wurde.

$$u' = \varepsilon^\nu . u \pm \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{6};$$

an Zahl 12. Ferner finden sich die 12 Substitutionen:

$$u' = \varepsilon^\nu u \pm \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{3}$$

und die 18 Substitutionen:

$$u' = \varepsilon^\nu u + \frac{\alpha \Omega_1 + \beta \Omega}{2}, \left(\alpha, \beta = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right).$$

Diese 66 Substitutionen im Verein mit den 6 noch fehlenden

$$u' = \varepsilon^\nu u$$

bilden die gesammte Gruppe.

Späterer Anwendungen wegen mögen noch folgende Einzelheiten über die Beziehung der beiderseitigen Darstellungen der G_{72} folgen. Wir betrachten zunächst wieder die cyclischen Untergruppen. Es gab 12 mit S gleichberechtigte Substitutionen, die Erzeugenden der 12 G_6. Da zwei u-Transformationen nur dann mit einander gleichberechtigt sein können, wenn rechter Hand der Coefficient ε^ν in beiden der gleiche ist, so folgt, dass die 12 mit S gleichberechtigten Substitutionen den 12 in der obigen Tabelle vorkommenden Formen

$$u' = \varepsilon u + \text{Const.}$$

entsprechen. Die 12 inversen Substitutionen

$$u' = \varepsilon^5 u + \text{Const.}$$

sind gleichfalls unter einander, aber nicht mit den ersteren gleichberechtigt. Geometrisch entsprechen diesen Cyclen Drehungen des Polygons um einen einzelnen der 12 Punkte $J = \infty$. Ausserdem sind nur noch die sechs Substitutionen

$$u' = u \pm \frac{4\,\Omega_i + \Omega_k}{6} \quad \text{und} \quad u' = u \pm \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{6}$$

von der Periode 6. Sie sind mit einander gleichberechtigt und zugleich 3 die inversen der 3 anderen. Ihnen entsprechen die 3 G'_6, in welche auch noch die übrigen 6 Substitutionen vom Typus

$$u_1 = u + \text{Const.}$$

eingehen. Dass diese 12 Substitutionen eine ausgezeichnete Untergruppe 12$^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, ist sofort deutlich. Dieselbe ist oben mit G'_{12} bezeichnet. Damit weiter eine Substitution

$$u' = \varepsilon^\nu u + \frac{\alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2}{6}$$

die Periode 3 habe, ist offenbar nöthig, dass

$$\varepsilon^{3\nu} u + (1 + \varepsilon^{\nu} + \varepsilon^{2\nu}) \frac{\alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2}{6} \equiv u \text{ (mod. } \Omega_1 \Omega_2)$$

ist. Dies giebt folgende Möglichkeiten:

1) $$\nu \equiv 0, \quad \alpha \equiv \beta \equiv 0 \text{ (mod. 2)},$$

also von der Identität abgesehen, folgende Substitutionen:

$$u' = u + \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{3}, \quad = u - \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{3}.$$

2) $\nu \equiv 2$. α und β beliebig. Dieses sind die 12 Substitutionen

$$u' \equiv \varepsilon^2 u + \frac{\alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2}{6}.$$

Sechs dieser Substitutionen enthalten rechter Hand Periodensechstel, zwei Periodendrittel, drei Periodenhälften und die noch fehlende Substitution ist $u' \equiv \varepsilon^2 u$.

3) $\nu \equiv 4$. α und β beliebig. Wir kommen auf die zu den eben genannten inversen Substitutionen;

$$u' \equiv \varepsilon^4 u + \frac{\alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2}{6}.$$

Wie diese Substitutionen den in §. 1 aufgezählten Cyclen zuzuordnen sind, ist vermöge ihrer Gruppirung sofort zu übersehen. Die beiden Substitutionen:

$$u' \equiv u \pm \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{3}$$

ergeben die ausgezeichnete G'_3, während die Periodenhälften im Verein mit den Substitutionen $u' \equiv \varepsilon^2 u$ und $u' \equiv \varepsilon^4 u$ die vier gleichberechtigten G_3 ergeben. Die restirenden acht Substitutionen, welche Periodensechstel und Periodendrittel als additive Glieder enthalten, bilden dann mit ihren inversen die acht gleichberechtigten G''_3. Den letzten acht Cyclen entsprechen die Drehungen des Polygons um Punkte $J \equiv 0$, deren Zahl 24 beträgt. Bei der einzelnen G''_3 bleiben jedesmal drei dieser Punkte fest, z. B. bei der Substitution

$$u' \equiv \varepsilon^2 u - \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{6}$$

die drei Punkte

$$u \equiv -\frac{\Omega_2}{6} + \alpha \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{3}, \ (\alpha \equiv 0, 1, 2).$$

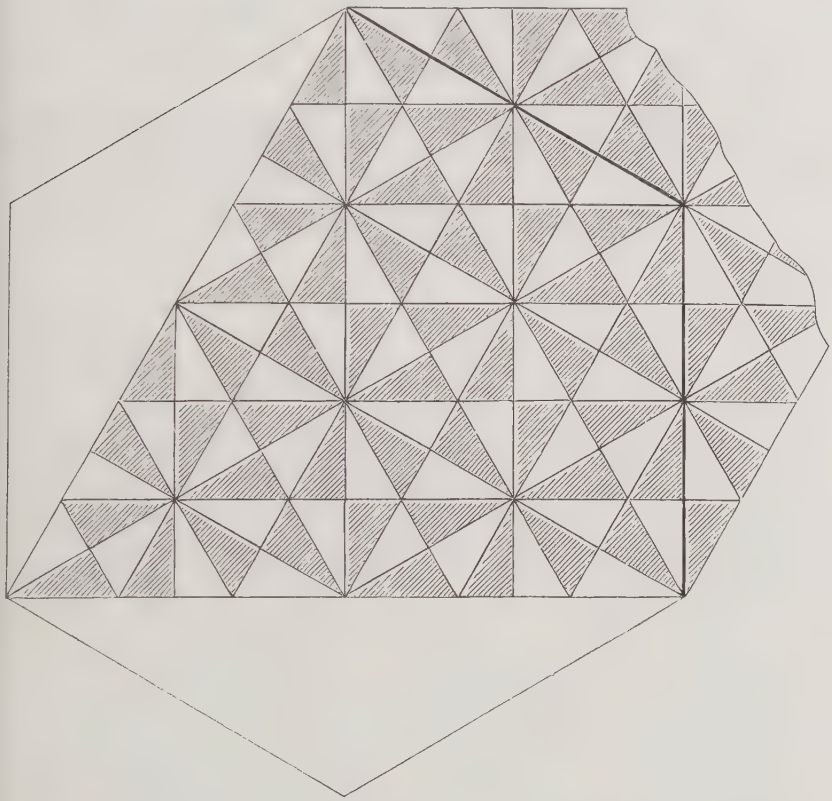
Es sind schliesslich noch die Substitutionen von der Periode 2 zu erledigen. Man findet in analoger Weise, wie oben, zunächst die drei Substitutionen:

$$u' = u + \frac{\Omega_1}{2}, \quad = u + \frac{\Omega_2}{2}, \quad = u + \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2},$$

welche, offenbar mit einander combinirt, eine ausgezeichnete Vierergruppe ergeben; sie entsprechen also den 3 G'_2. Ausserdem ist jede Substitution $u' = -u + \frac{\alpha\,\Omega_1 + \beta\,\Omega_2}{6}$ von der Periode 2. Darunter sind zunächst drei gleichberechtigt, nämlich:

$$u' = -u,\ u' = -u \pm \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{3}.$$

Fig. 6.



Es sind die 3 G'_2. Die neun noch fehlenden bilden endlich die neun G''_2; es sind geometrisch die Drehungen des Polygons um die Punkte $J = 1$. Bei den einzelnen dieser neun Operationen bleiben je vier Punkte fest, z. B. bei T:

$$u' = -u - \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{6},$$

die Punkte

$$u = -\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{12} + \frac{\alpha\,\Omega_1 + \beta\,\Omega_2}{2}\left(\alpha_1\ \beta = \begin{matrix}0,\ 0\\ 0,\ 1\\ 1,\ 0\\ 1,\ 1\end{matrix}\right).$$

Es würde ein Leichtes sein, diese Betrachtungen zu vervollständigen, indessen übersehen wir nach dem Gesagten schon vollständig, wie die Abbildung beschaffen ist, welche das Integral erster Gattung von dem Polygon 6^{ter} Stufe auf ein Periodenparallelogramm seiner Ebene leistet.

In der nebenstehenden Figur (Fig. 6) ist dieselbe wiedergegeben. Darin erscheinen die Dreiecke der ω-Theilung wiederum als Dreiecke, die nun aber die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ tragen. Wir haben also in der gegenwärtigen Figur gerade diejenige Deformation des Polygons zu sehen, welche in den analogen Fällen 2, 3, 4 auf die Diëder-, Tetraëder- und Octaëderconfiguration führte. Das Polygon führt solchergestalt direct auf ein Sechseck, dessen je zwei gegenüberliegende Seiten sich decken und das durch eine leichte Modification in die Form des Parallelogramms verwandelt wird.

§. 4.

Abbildung des Polygons auf eine Curve dritter Ordnung.

Nach dieser transcendenten Behandlung unseres Problems soll die algebraische Lösung desselben geleistet werden. Indem wir also nach einem einfachsten Galois'schen System 6^{ter} Stufe suchen, bemerken wir vorab, dass durch Simultanstellung von λ und a, des Integralmoduls und der Tetraëderirrationalität ein volles Modulsystem gewonnen wird. Aber die Complicirtheit der zwischen ihnen bestehenden algebraischen Relation

(1) $256\ (a^3 - 1)^3\ (\lambda^2 - \lambda + 1)^3 - 27\,\lambda^2\,(\lambda - 1)^2\,a^3\,(a^3 + 8)^3 = 0.$

[man erhält dieselbe durch Elimination des J aus den bekannten Gleichungen $J = \varphi\ (\lambda)$ und $J = \psi\ (a)$] lässt es nicht räthlich erscheinen, dieses Modulsystem weiteren Untersuchungen zu Grunde zu legen.

Wenn eine Modulfunction 6^{ter} Stufe bei den Operationen S^3 oder S^2 oder endlich S invariant bleibt, so kann man das Polygon auf die Hälfte resp. auf das Drittel oder Sechstel reduciren und das Verhalten der Functionen auf diesen Theilen studiren. Die veränderte Kantendeckung kann man dabei *a priori* angeben. Bei der diesbezüglichen Untersuchung stellt sich sofort heraus, dass die drei definirten Flächen sämmtlich vom Geschlecht $p = 0$ sind. Sie definiren also Hauptmoduln, welche in der Folge x, y, τ genannt werden. Nächste Aufgabe ist, die Beziehung dieser Grössen zu einander und zu λ und a zu untersuchen.

Der Hauptmodul $\tau(\omega)$*), welcher bei der Substitution S invariant ist, gehört demnach zu einer Fläche von 12 Dreiecken, welche aus zwei symmetrischen Parallelstreifen des Polygons 6^{ter} Stufe zusammengesetzt ist. Wir ordnen das Polygon von τ symmetrisch um die imaginäre Axe; dann decken sich je zwei freie Kanten, die gleichfalls symmetrisch zu der eben genannten Axe liegen. Wir fixiren τ durch die Festsetzung:

$$(2) \qquad \tau(0) = 0,\ \tau\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ \tau(\infty) = \infty.$$

Können wir dann noch angeben, welchen Werth τ im Punkte $\omega = \frac{1}{3}$ annimmt, so werden wir diesen Hauptmodul zur rationalen Darstellung aller derjenigen Modulfunctionen seines Polygons benutzen können, welche nur in den Spitzen desselben unstetig werden.

Ich setze nun zur Abkürzung:

$$(3) \qquad \lambda(\lambda - 1) = u,\quad a^3 - 1 = v,\quad \tau\left(\frac{1}{3}\right) = \beta.$$

Die Moduln u und v bleiben bei der Substitution S ungeändert und sind somit rational in τ darstellbar. Sind c_1 und c_2 zwei Constante, so findet man unter Benutzung der Bezeichnung β Folgendes:

$$(4) \qquad u = c_1 \frac{\tau^3(\tau - \beta)}{(\tau - 1)^3},\quad v = c_2 \frac{\tau^2(\tau - 1)}{(\tau - \beta)^2}.$$

Nun besteht zwischen u und v die algebraische Relation:

$$(5) \qquad 256(u + 1)^3 v^3 - 27 u^2 (v + 1)(v + 9)^3 = 0,$$

welche als eindeutiges Bild der Fläche von τ vom Geschlechte $p = 0$ ist. Durch die Identitäten (4) wird (5) selbst identisch erfüllt, was mehr als hinreichend ist, die drei unbekannten Zahlen c_1, c_2 und β zu bestimmen. Das Resultat der hier sich anreihenden Rechnung ist:

$$(6) \qquad u = \frac{\tau^3(2^3 - 3^2\tau)}{2^3(\tau - 1)^3},\quad v = \frac{3^3\tau^2(1 - \tau)}{(2^3 - 3^2\tau)^2},\quad \beta = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}.$$

Ordnet man diese Gleichungen nach Potenzen von τ, so entstehen für τ zwei Gleichungen resp. dritten und vierten Grades, welche unter der Bedingung (5) eine gemeinsame Wurzel haben, die man leicht durch u und v rational ausdrückt.

Zur Definition der beiden anderen Hauptmoduln setze man fest, dass

$$(7) \quad y(0) = 3,\quad y(1) = -3,\quad y(\infty) = \infty,$$

$$(8) \quad x\left(\frac{5}{2}\right) = \varepsilon,\ x\left(\frac{3}{2}\right) = -1,\ x\left(\frac{1}{2}\right) = \varepsilon^5,\ \left(\varepsilon = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right).$$

*) Derselbe ist nahe verwandt mit der Grösse τ, durch welche Herr Gierster die Modulargleichung für Transformation 6^{ten} Grades der absoluten Invariante aufstellt. cf. Math. Ann. Bd. XIV, S. 541.

Dann zeigt eine aufmerksame Betrachtung der zu diesen Functionen gehörigen Flächen, dass unmittelbar folgende Beziehungen bestehen:

$$(9) \qquad y = 3\sqrt{1-\tau}, \quad x = \sqrt[3]{8-9\tau}.$$

Die rationale Abhängigkeit der x, y von λ und a geht allerdings aus diesen Formeln noch nicht hervor. Man kann sie jedoch gerade wie im Falle des τ in Erfahrung bringen. In diesem Sinne findet man für y folgende Beziehungen:

$$(10) \qquad \lambda = \frac{(3-y)^3(1+y)}{16y^3}, \quad a^3 - 1 = \frac{(9-y^2)^2y^2}{3^3(1-y^2)^2}.$$

Die leichte Inversion dieser Formeln leistet das Gewünschte.

Für x findet sich in ganz entsprechender Weise:

$$(11) \qquad \lambda(1-\lambda) = \frac{(8-x^3)^3 \cdot x^3}{2^8(x^3+1)^3}, \quad a = \frac{x^3+4}{3x^2}\ ^*).$$

Bemerken wir noch, dass auf dem ganzen Polygon sechster Stufe y dreiwerthig, x zweiwerthig ist und dass die Punkte mit gleichem y durch 1, S^2, S^4, die mit gleichem x durch 1, S^3 sich reproduciren, so erkennt man in x und y ein Galois'sches System sechster Stufe. Durch Elimination des τ zwischen den Gleichungen 9 findet man die algebraische Relation in der Form:

$$(12) \qquad y^2 = x^3 + 1,$$

welche von der Weierstrass'schen Normalform der Curven des Geschlechtes $p = 1$ unwesentlich abweicht. Darin fehlt rechts das lineare Glied, wie es sein muss, da der äquianharmonische Fall vorliegt, also $g_2 = 0$ ist.

Die Formeln (10) und (11) mit ihren Inversionen stellen die eindeutige Transformation zwischen (1) und (12) her.

§. 5.

Algebraische Form der 72 Transformationen und geometrische Deutung derselben.

Um kurz zu sein, will ich die algebraische Form nur für die Operationen S und T anführen, was genügend ist. Man findet:

$$(1) \qquad x(\omega+1) = \varepsilon^4 x(\omega), \quad y(\omega+1) = -y(\omega).$$

---

*) Aus (10) und (11) resultiren folgende bemerkenswerthe Darstellungen:

$$\sqrt[3]{\lambda(1-\lambda)} = \frac{(8-x^3)x}{2^{8/3}(x^3+1)}, \quad \sqrt{a^3-1} = \frac{(9-y^2)y}{3^{3/2}(1-y^2)},$$

welche die bei einer früheren Gelegenheit über diese Grössen gemachte Behauptung rechtfertigen.

$$(2)\quad x\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 2\cdot\frac{1+x+y}{1-2x+y},\quad y\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \frac{3(1+x)^2+3y}{(1+x)^2-3y}.$$

Formel (1) folgt sofort aus (9) des vorigen Paragraphen; (2) ergiebt sich leicht aus späteren Formeln. Indem man in (2) die ganzen rechten Seiten oder x und y allein um gewisse Einheitswurzeln modificirt, erledigen sich bereits 42 Substitutionen. Die noch fehlenden 30 sind zum Theil noch einfacher.

Der Operation S entspricht somit eine Collineation, bei der überdies die Coordinatenaxen erhalten bleiben. T ist eine unter 9 gleichberechtigten Substitutionen, die sich in der transcendenten Form

$$u' \equiv -u + \textit{Const.}\ (\textit{mod.}\ \Omega_1\Omega_2)$$

darstellen. Nach dem Abel'schen Theorem sind drei Punkte der Curve auf gerader Linie, wenn die Summe ihrer u-Argumente congruent 0 ist. Dieses gilt von den drei Punkten u, u', $-C$. Zieht man demnach vom Punkte $-C$ der Curve ein Büschel von Geraden, so sind je die beiden beweglichen Schnittpunkte einer Geraden des Büschels durch die fragliche Substitution einander zugeordnet und wir erkennen sofort in den Berührungspunkten der vier vom Punkte $-C$ der Curve noch möglichen Tangenten die vier festbleibenden Punkte der einzelnen Transformation. Die $4\cdot9$ so festbleibenden Punkte sind die 36 Punkte $J=1$. Die Gruppirung dieser Punkte, sowie der Projectionscentren ist in folgender Art charakterisirt:

Ich betrachte das Wendepunktproblem im vorliegenden Specialfalle. Da Wendepunkte bei Collineationen wieder in solche übergehen, so werden sich diese neun Punkte bei der cyclischen Untergruppe S^μ selbst cyclisch permutiren. Wie sich zeigt, geschieht dies in drei Gruppen. Man sieht ohne Mühe, dass sich die Punkte des Polygons im Allgemeinen zu sechs permutiren, dass aber ein Tripel, ein Punktepaar und ein einzelner Punkt sich gesondert cyclisch vertauschen beziehungsweise erhalten bleibt. Dieser letzte Punkt ist der einzige Fixpunkt, dem das Argument $u=0$ zukam. Man weiss, dass $u=0$ ein Wendepunkt der Curve ist. Die acht übrigen Wendepunkte theilen sich in zwei Gruppen. Die eine bildet offenbar das Punktepaar, für das wir die Argumente $\pm\frac{\Omega_1+\Omega_2}{3}$ finden, die andere die noch restirenden sechs Punkte, welche den noch fehlenden Periodendritteln entsprechen.

Knüpfen wir zuvörderst an die drei Punkte 0, $\pm\frac{\Omega_1+\Omega_2}{3}$ drei Punkte $J=\infty$, welche folgenden Werthen von x und y entsprechen: $x=0\begin{cases}y=\infty\\y=1\\y=-1\end{cases}$. Von jedem der drei Wendepunkte ziehen wir die

drei noch möglichen Tangenten an die Curve, wodurch neun weitere Punkte fixirt werden. Es sind die neun noch fehlenden Punkte $J = \infty$, so dass die Gruppe dieser 12 Punkte eine unsymmetrische Theilung in $9 + 3$ erhält. Die neun eben erhaltenen Punkte sind nun die Projectionscentren der neun gleichberechtigten Transformationen der Curve in sich. Die $4 . 9$ Fixpunkte dieser Projectionen, welche sich nun sofort durch ein nochmaliges Tangentenziehen ergeben, bilden dann die Gruppe der 36 Punkte $J = 1$.

Die sechs weiteren Wendepunkte, welche beziehungweise auf den Geraden $y \pm i\sqrt{3} = 0$ liegen, entsprechen Punkten $J = 0$. Durch Tangentenziehen von ihnen aus erhält man 18 neue Punkte $J = 0$, so dass die Gruppe dieser 24 Punkte in zwei Theilgruppen $18 + 6$ zerlegt erscheint.

Eine derartige Theilung fehlt nur bei den 36 Punkten $J = 1$.

§. 6.

Andere einfache Modulsysteme sechster Stufe.

Die Unsymmetrien, welche soeben in den Gruppirungen der Punkte $J = 0, \infty$ hervortraten, haben ihren Grund in der unsymmetrischen Einführung der x, y; denn y blieb unverändert bei der Substitution S^2 und dieselbe war eine unter vier gleichberechtigten. Um in dieser Beziehung der Symmetrie gerecht zu werden, stelle ich zunächst folgende Ueberlegung an:

S war eine von 12 gleichberechtigten Substitutionen, welche ich $S, S_1, S_2, \ldots . S_{11}$ nennen will. Neben die Function $\tau(\omega)$ stellen sich also 11 andere τ_i, die den Bedingungen genügen $\tau_i(S_i\omega) = \tau_i(\omega)$. Gehen wir von hier aus zu y, so stellen sich neben das ursprüngliche y elf andere y_i den Functionalgleichungen entsprechend $y_i(S_i^2\omega) = y_i(\omega)$. Aber unter den S_i^2 sind, wie oben gesagt, nur vier von einander verschiedene, nämlich:

$$(1)\quad \omega' \equiv \omega + 2,\ \omega' \equiv \frac{\omega}{4\omega + 1},\ \omega' \equiv \frac{\omega + 4}{2\omega + 3},\ \omega' \equiv \frac{3\omega + 4}{2\omega + 1},$$

also dass auch unter den y_i nur vier wesentlich verschiedene sind, je drei aber Hauptmoduln derselben Fläche und also linear von einer unter ihnen abhängen.

Die nähere Betrachtung bestätigt dieses. Neben y treten im eben erörterten Sinne folgende beide lineare Functionen als gleichberechtigt $\frac{y + 3}{y - 1}$ und $\frac{y - 3}{y + 1}$. Ferner bestätigt man sofort, dass $y\left(\frac{-1}{\omega}\right)$, $y\left(\frac{-1}{\omega + 2}\right)$, $y\left(\frac{-1}{\omega + 4}\right)$ resp. bei der zweiten, dritten und vierten der

obigen Substitutionen unverändert bleibt, und aus ihnen sind dann wieder ähnliche lineare Functionen herzustellen, wie aus $y(\omega)$. Dadurch erhält man alle 12 y_i.

Statt der Grössen $y\left(\frac{-1}{\omega}\right)$, $y\left(\frac{-1}{\omega+2}\right)$, $y\left(\frac{-1}{\omega+4}\right)$ brauche ich drei von den eben gemeinten linearen Functionen und will für die Folge definiren:

$$(1)\quad y_1 = \frac{3 - y\left(\frac{-1}{\omega}\right)}{1 + y\left(\frac{-1}{\omega}\right)},\quad y_2 = \frac{3 - y\left(\frac{-1}{\omega+2}\right)}{1 + y\left(\frac{-1}{\omega+2}\right)},\quad y_3 = \frac{3 - y\left(\frac{-1}{\omega+4}\right)}{1 + y\left(\frac{-1}{\omega+4}\right)}.$$

Die vier Grössen y, y_1, y_2, y_3 entsprechen dann einander, was sich äusserlich dadurch markirt, dass sie den Integralmodul λ alle in derselben Weise darstellen:

$$(2)\qquad \lambda = \frac{(3 - y)^3 (1 + y)}{16 y^3} = \frac{(3 - y_i)^3 (1 + y_i)}{16 y_i^3}.$$

Diese Formel folgt aus (10) §. 4 und durch lineare Transformation derselben. Man könnte diesen Umstand insbesondere benutzen, um durch Elimination von λ Relationen zwischen je zwei y_i herzustellen; dieselben werden dann formell identisch ausfallen, z. B.:

$$(3)\qquad y^3 y_1^3 + 27(y^2 + y y_1 + y_1^2) = 18 y^2 y_1^2,$$

wodurch das Polygon sechster Stufe eindeutig auf eine ebene Curve sechster Ordnung abgebildet erscheint.

Indessen gewinnen die Relationen bedeutend an Einfachheit, wenn man in dieselben zugleich alle vier y eingehen lässt. Um solche Gleichungen zu finden, stelle ich zunächst die y_i als rationale Functionen auf der Curve $y^2 = x^3 + 1$ dar. Eine etwas längere Zwischenrechnung fördert Folgendes:

$$(4)\quad y_1 = -\frac{3y}{(1 + x)^2}\ ^*),\quad y_2 = -\frac{3y}{(1 + \varepsilon^2 x)^2},\quad y_3 = -\frac{3y}{(1 + \varepsilon^4 x)^2}.$$

Daraus fliessen ohne Weiteres folgende äusserst symmetrische Relationen:

$$(5)\quad \sum\left(\frac{1}{y}\right) = 0,\quad \sum\left(\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{4}{3},\quad \sum\left(\frac{1}{y}\right)^3 = \frac{8}{9}(2\lambda - 1),$$
$$y y_1 y_2 y_3 + 27 = 0.$$

Die Summen sind stets über die vier y auszudehnen; in der dritten Formel ist dadurch die Symmetrie gewahrt, dass rechts der Integralmodul λ eingeführt ist. Die Curve, welche man erhält, wenn man die

*) Hierin liegt zugleich der Beweis der im vorigen Paragraphen für $y\left(\frac{-1}{\omega}\right)$ mitgetheilten Darstellung.

vier reciproken Werthe der y als Coordinaten deutet, ist von der vierten Ordnung und in Folge der Gleichung $\sum\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ in einem Raume von drei Dimensionen gelegen. Den 72 eindeutigen Transformationen entsprechen im Allgemeinen nur lineargebrochene Substitutionen der $\frac{1}{y_i}$.

Für die Function $x(\omega)$ sind die Verhältnisse durchaus analog. S^3 ist eine von drei gleichberechtigten Substitutionen. Die drei wesentlich verschiedenen Formen von x sind hier: $x(\omega)$, $x\left(\frac{-1}{\omega}\right)$, $x\left(\frac{-1}{\omega+3}\right)$. Aber statt der beiden letzten Grössen braucht man passender wieder lineare Functionen derselben, indem man setzt:

$$x\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \frac{2 - x_1}{1 + x_1}, \quad x\left(\frac{-1}{\omega+3}\right) = \frac{2 - x_2}{1 + x_2}. \tag{6}$$

Die Functionen x, x_1, x_2 sind dann wieder einander zugeordnet (in der Reihe der $12\,x_i$) und stellen nun die Tetraëderirrationalität formell übereinstimmend dar, indem:

$$a = \frac{x^3 + 4}{3x^2} = \frac{x_1^3 + 4}{3x_1^2} = \frac{x_2^3 + 4}{3x_2^2}. \tag{7}$$

Durch Elimination von a entspringen biquadratische Relationen zwischen je zwei x, z. B.:

$$x^2 x_1^2 = 4(x + x_1). \tag{8}$$

Aber auch hier verhalten sich die reciproken Werthe der x am einfachsten. Denn die Darstellung der $x_1 x_2$ im vollen Modulsysteme (x, y) ist diese:

$$x_1 = -\frac{2x}{1 + y}, \quad x_2 = -\frac{2x}{1 - y}, \tag{9}$$

woraus ohne Mühe folgende Relationen sich ergeben:

$$\sum\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \ \sum\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2}a, \ \sum\left(\frac{1}{x}\right)^3 = -\frac{3}{4}, \tag{10}$$
$$x x_1 x_2 + 4 = 0.$$

Nimmt man die reciproken Werthe der x als Modulsystem, so ist man im Wesentlichen auf eine ebene Curve dritter Ordnung geführt. Auch hier erscheinen die eindeutigen Transformationen in sich nur in linear gebrochener Form.

§. 7.

Die transformirten Sigmatheilwerthe.

Ich betrachte hier zunächst die σ-Theilwerthe und zwar deshalb, weil erstens ihre Gruppirung zu den Entwickelungen des letzten Paragraphen die grösste Analogie zeigt, und weil sich sodann fast alle Moduln der Theorie durch sie leicht erledigen. Bedeuten zunächst $\sigma_{\lambda,\mu}$ zweite Theilwerthe, so betrachte ich den speciellen Theilwerth σ_{10}. Durch die Transformation:

$$\overline{\omega_1} = \frac{\omega_1}{3}, \quad \overline{\omega_2} = \omega_2,$$

gehe derselbe über in $\overline{\sigma_{10}}$, dann ist der Quotient $\frac{\overline{\sigma_{10}}}{\sigma_{10}}$ eine Modulfunction, deren vierte Potenz sicher der sechsten Stufe angehört und noch dazu bei der Substitution S erhalten bleibt, also dass:

$$\left(\frac{\overline{\sigma_{10}}}{\sigma_{10}}\right)^4 = rat(\tau). \tag{1}$$

Die Reihenentwickelungen geben die explicite Form dieser Function wie folgt an:

$$\left(\frac{\overline{\sigma_{10}}}{\sigma_{10}}\right)^2 = \frac{\tau}{9\tau - 8}, \tag{2}$$

so dass der Quotient eine mit dem Hauptmodul τ äquivalente Grösse ist.

Um eine ähnliche Darstellung für y zu gewinnen, empfiehlt es sich, an (2) anzuknüpfen und durch Hinzufügung gewisser Δ-Factoren zu den ϑ-Functionen überzugehen. Bezeichnet abkürzend: $\overline{\Delta} = \Delta\left(\frac{\omega_1}{3}, \omega_2\right)$, so bemerke ich in diesem Sinne zunächst, dass $\frac{\overline{\Delta}}{\Delta}$ ein Modul dritter Stufe ist, welcher sogar nur von α^3 abhängt. Man findet:

$$\frac{\overline{\Delta}}{\Delta} = \left(\frac{27}{\alpha^3 - 1}\right)^2,$$

also durch Benutzung von (6) §. 4:

$$\sqrt{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta}} = \left(\frac{9\tau - 8}{\tau}\right)^2 \frac{1}{1-\tau}. \tag{3}$$

Die Combination von (2) und (3) ergiebt somit:

$$\left(\frac{\sqrt[8]{\overline{\Delta}} \cdot \sigma_{10}}{\sqrt[8]{\Delta} \cdot \overline{\sigma_{10}}}\right)^4 = 1 - \tau. \tag{4}$$

Aus der Verbindung von ϑ_1 und σ folgen aber sofort die Formeln:

$$\sqrt[8]{\Delta} \cdot \sigma_{10} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\,\vartheta_2, \quad \sqrt[8]{\overline{\Delta}} \cdot \overline{\sigma_{10}} = \sqrt{3}\,\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \theta_2,$$

wo ϑ_2 in bekannter Weise den Nullwerth bezeichnet und θ_2 durch die mehrfach definirte Transformation 3^{ten} Grades aus ϑ_2 entsteht. Somit erhalten wir:

$$\left(\frac{\vartheta_2}{\theta_2}\right)^2 = 3\sqrt{1-\tau} = y. \tag{5}$$

Wir führen für die übrigen Repräsentanten der Transformation 3^{ten} Grades die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\vartheta_a(0, q^{1/3}) = \theta'_a, \quad \vartheta_a(0, \varepsilon^2 q^{1/3}) = \theta''_a, \quad \vartheta_a(0, \varepsilon^4 q^{1/3}) = \theta'''_a, \tag{6}$$

wobei übrigens die Repräsentanten so zu wählen sind, dass im ∞ fernen Punkte der imaginären Axe $\sqrt{\theta_2} = \sqrt{2}\,q^{3/8}$, $\sqrt{\theta_0} = \sqrt{\theta_3} = 1$ und $\sqrt[4]{-3}\,\sqrt{\theta'_2} = \sqrt{2}\,q^{1/24}$, $\sqrt[4]{-3}\,\sqrt{\theta'_0} = -\sqrt[4]{-3}\,\sqrt{\theta'_3} = 1$, während die Formeln für θ''_a und θ'''_a aus den entsprechenden für θ'_a durch die Operationen S^2 und S^4 resp. hervorgehen.

Nehmen wir übrigens die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen wieder auf, so reiht sich neben (5) folgendes System von Formeln:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\vartheta_2}{\theta_2}\right)^2 = y, \quad \left(\frac{\vartheta_3}{\theta_3}\right)^2 = \frac{y+3}{y-1}, \quad \left(\frac{\vartheta_0}{\theta_0}\right)^2 = \frac{y-3}{y+1}; \\ &\left(\frac{\vartheta_2}{\theta_2^{(i)}}\right)^2 = y_i, \quad \left(\frac{\vartheta_3}{\theta_3^{(i)}}\right)^2 = \frac{y_i+3}{y_i-1}, \quad \left(\frac{\vartheta_0}{\theta_0^{(i)}}\right)^2 = \frac{y_i-3}{y_i+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Hierdurch ist ein äusserst symmetrisches Resultat gewonnen. Die Zahl der zweiten Theilwerthe ist 3, entsprechend den drei gleichberechtigten linearen Formen von y; es giebt vier Repräsentanten für Transformation 3^{ten} Grades, entsprechend vier wesentlich verschiedene y_i.

Dividirt man weiter die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{\vartheta_2}{\theta_2}\right)^2 = y, \quad \left(\frac{\vartheta_2}{\theta'_2}\right)^2 = y_1$$

und betrachtet den Zusammenhang von y, y_1 und x, nämlich:

$$y_1 = -\frac{3y}{(1+x)^2}, \tag{8}$$

so ergiebt sich sofort:

$$1 + x = \sqrt{-3}\,\frac{\theta'_2}{\theta_2}, \quad 1 + x_1 = \sqrt{-3}\,\frac{\theta'_0}{\theta_0}, \quad 1 + x_2 = \sqrt{-3}\,\frac{\theta'_3}{\theta_3}. \tag{9}$$

Die beiden anderen Formeln folgen in ähnlicher Weise. Der Quotient zweier verschiedenen Repräsentanten der Transformation 3^{ten} Grades führt auf die x, die drei verschieden zweiten Theilwerthe entsprechen den drei x_i.

Man kann die Gestalt der letzten Formeln noch ein wenig modificiren. Z. B. folgt durch Multiplication der zweiten und dritten:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) = -3\,\frac{\theta_0'\,\theta_3'}{\theta_0\,\theta_3},$$

woraus in Folge der zwischen den x bestehenden Relationen sofort folgt

$$(10)\quad 1 - \frac{2}{x} = \sqrt{-3}\,\sqrt{\frac{\theta_0'\,\theta_3'}{\theta_0\,\theta_3}},\quad 1 - \frac{2}{x_1} = \sqrt{-3}\,\sqrt{\frac{\theta_2'\,\theta_3'}{\theta_2\,\theta_3}},$$

$$1 - \frac{2}{x_2} = \sqrt{-3}\,\sqrt{\frac{\theta_0'\,\theta_2'}{\theta_0\,\theta_2}}.$$

Anmerkung. Die letzten Formeln geben eine einfache Darstellung des überall endlichen Integrales, welche hier noch nachträglich angeführt sein mag. Zu dem Ende sehe ich aber von dem Factor $\sqrt{-3}$ bei den $\theta_\alpha{}^i$ ab, wodurch der Repräsentant der Transformation 3ten Grades gering modificirt wird. Dann ist:

$$y = \left(\frac{\vartheta_2}{\theta_2}\right)^2,\qquad 1 + x = \frac{\theta_2'}{\theta_2},$$

und also das Integral:

$$(11)\qquad u(\omega) = \int \frac{\left|\begin{matrix}\theta_2, & d\theta_2\\ \theta_2', & d\theta_2'\end{matrix}\right|}{\vartheta_2^2}.$$

Die bekannten Reihenentwickelungen der Theta geben mühelos eine interessante Potenzreihe für das Integral, von welcher ich hier die ersten Glieder anführe:

$$(12)\quad u(\omega) = 2\,q^{1/3} - \frac{8}{7}\,q^{7/3} + \frac{4}{13}\,q^{13/3} + \frac{16}{19}\,q^{19/3} - \frac{10}{25}\,q^{25/3} - \cdots.$$

Es ist nicht schwierig, inductiv den allgemeinen Charakter der Coefficienten zu finden. Bezeichnet man die Reihe durch:

$$u(\omega) = \sum_{m \equiv 1} \frac{c(m)}{m}\,q^{\frac{m}{3}};$$

so durchläuft m alle positiven ganzen Zahlen, welche $\equiv 1$ (mod. 6) sind. Zugleich ist:

$$c(m) = 2\,\Sigma\left(\frac{\nu}{3}\right)\cdot\nu,$$

wo $\left(\frac{\nu}{3}\right)$ das Legendre'sche Zeichen bedeutet und die Summe auszudehnen ist über alle Lösungen ν der Gleichung $m = 3\,\mu^2 + \nu^2$, bei welchen ν eine ganze positive Zahl, μ eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet.

Ebenso gut wie wir Transformation dritten Grades auf die zweiten Theilwerthe anwandten und dadurch brauchbare Moduln 6ter Stufe erhielten, kann man auch umgekehrt Transformation zweiten Grades auf die dritten Theilwerthe $\sigma_{\lambda,\mu}$ ausüben. Indessen werden die Verhältnisse hier weniger einfach; ich begnüge mich daher mit einem Beispiel, das übrigens im Verein mit der Darstellung

$$(13)\qquad a(\omega) = \frac{x^3 + 4}{3\,x^2},$$

alle übrigen einschlägigen Formeln durch leichte Umformungen zu berechnen gestattet. Bedeuten $\sigma_{\lambda,\mu}$ also jetzt dritte Theilwerthe und entstehe $\overline{\sigma_{\lambda,\mu}}$ aus $\sigma_{\lambda,\mu}$ durch die Transformation $\overline{\omega_1} = \frac{\omega_1}{2}$, $\overline{\omega_2} = \omega_2$, so ist $\left(\frac{\overline{\sigma_{10}}}{\sigma_{10}}\right)^3$ eine rationale Function von τ, deren Form man durch Reihenentwickelungen findet:

$$\left(\frac{\overline{\sigma_{10}}}{\sigma_{10}}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\tau}{\tau - 1}, \tag{14}$$

so dass also dieser Quotient wesentlich dem Hauptmodul $\tau(\omega)$ gleicht.

Auch in Betreff der sechsten Theilwerthe, welche sich ebenfalls durch geeignete Combinationen auf die sechste Stufe erniedrigen lassen, begnüge ich mich mit wenigen Beispielen, solchen insbesondere, welche wieder auf den Hauptmodul τ führen. Sind also $\sigma_{\lambda,\mu}$ nun sechste Theilwerthe, so gilt z. B.:

$$\left(\frac{\sigma_{20}}{\sigma_{30}}\right)^{12} = \frac{\tau(9\tau - 8)^3}{2^{12}(\tau - 1)^4}; \tag{15}$$

$$\left(\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{30}}\right)^3 = \frac{1}{8} \frac{\tau}{\tau - 1}; \tag{16}$$

$$\left(\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{20}}\right)^4 = \frac{\tau}{9\tau - 8} \text{ u. a. m.} \tag{17}$$

§. 8.

Transformirte Moduln.

Um vollständig zu sein, sind noch die durch Transformation 3^{ten} resp. 2^{ten} Grades aus $\lambda(\omega)$ und $a(\omega)$ entspringenden Moduln zu discutiren. Ihre Darstellungen im Modulsystem x, y kann man entweder aus den bezüglichen ω-Theilungen ablesen oder aus den Formeln des vorigen Paragraphen sofort überleiten. Wesentlich Neues tritt dabei nicht auf. Man findet:

(1) $\lambda(3\omega) = \frac{(3-y)(1+y)^3}{16y}$, $\lambda\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{(3-y_1)(1+y_1)^3}{16y_1}$ etc.

(2) $a(2\omega) = \frac{x^3 - 2}{3x}$, $a\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{x_1^3 - 2}{3x_1}$, $a\left(\frac{\omega + 3}{2}\right) = \frac{x_2^3 - 2}{3x_2}$,

denen sich noch einmal die ursprünglichen Functionen mit folgenden Darstellungen anschliessen mögen:

(3)
$$\lambda(\omega) = \frac{(3-y)^3(1+y)}{16y^3} = \frac{(3-y_1)^3(1+y_1)}{16y_1^3} = \cdots$$
$$a(\omega) = \frac{x^3 + 4}{3x^2} = \frac{x_1^3 + 4}{3x_1^2} = \frac{x_2^3 + 4}{3x_2^2}.$$

Es ist eine charakteristische Eigenschaft dieser Bildungen, dass sich zahlreiche Combinationen derselben herstellen lassen, welche Potenzen von rationalen Functionen der x, y etc. sind. Dies heisst in anderen Worten: Die λ und auch die a lassen sich in mehrfacher Weise so mit einander verbinden, dass auch noch Wurzeln aus denselben der sechsten Stufe angehören. Beispiele sind:

$$(4)\qquad \sqrt[8]{\frac{[1-\lambda(3\omega)]^3}{1-\lambda(\omega)}} = \frac{y-1}{2},\quad \frac{\sqrt{\lambda(3\omega)}}{\sqrt{\lambda(\omega)}} = \frac{y(y+1)}{y-3},$$
$$\sqrt[3]{a(2\omega)-1}\,\sqrt[3]{a(\omega)-1} = \frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt[3]{9x}} \text{ u. a. m.}$$

Ich will in Form einer kleinen Tabelle eine Reihe weiterer Combinationen der λ angeben, dieselben aber aus praktischen Rücksichten in Form von Thetaquotienten schreiben.

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_2\theta_2}{\vartheta_3\theta_3} = \frac{4y}{(y+3)(y-1)};$$

$$(6)\qquad \frac{\vartheta_0\theta_0}{\vartheta_3\theta_3} = \frac{(y+1)(y-3)}{(y-1)(y+3)};$$

$$(7)\qquad \left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right)^2\sqrt{\frac{\vartheta_2\theta_2}{\vartheta_3\theta_3}} = \frac{8y}{(y+3)(y-1)^2};$$

$$(8)\qquad \left(\frac{\theta_0}{\theta_3}\right)^2\sqrt{\frac{\vartheta_0\theta_0}{\vartheta_3\theta_3}} = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2\frac{y-3}{y+3};$$

$$(9)\qquad \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2\sqrt{\frac{\vartheta_2\theta_2}{\vartheta_3\theta_3}} = \frac{8y^2}{(y+3)^2(y-1)};$$

$$(10)\qquad \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)^2\sqrt{\frac{\vartheta_0\theta_0}{\vartheta_3\theta_3}} = \frac{y+1}{y-1}\cdot\left(\frac{y-3}{y+3}\right)^2;$$

$$(11)\qquad \left(\frac{\vartheta_3\theta_2}{\vartheta_2\theta_3}\right)^2 = \frac{y+3}{y(y-1)};$$

$$(12)\qquad \left(\frac{\vartheta_3\theta_0}{\vartheta_0\theta_3}\right)^2 = \frac{y+1}{y-1}\cdot\frac{y+3}{y-3};$$

$$(13)\qquad \sqrt{\frac{\theta_2^3\vartheta_3}{\vartheta_2\theta_3^3}} = \frac{2}{y-1};$$

$$(14)\qquad \sqrt{\frac{\theta_0^3\vartheta_3}{\vartheta_0\theta_3^3}} = \frac{y+1}{y-1};$$

$$(15)\qquad \sqrt{\frac{\vartheta_2^3\theta_3}{\theta_2\vartheta_3^3}} = \frac{2y}{y+3};$$

$$(16)\qquad \sqrt{\frac{\vartheta_0^3\theta_3}{\theta_0\vartheta_3^3}} = \frac{y-3}{y+3}.$$

Diesen Formeln mögen sich noch die drei obigen anschliessen:

$$(17)\quad \left(\frac{\vartheta_2}{\theta_2}\right)^2 = y, \quad (18)\quad \left(\frac{\vartheta_3}{\theta_3}\right)^2 = \frac{y+3}{y-1}, \quad (19)\quad \left(\frac{\vartheta_0}{\theta_0}\right)^2 = \frac{y-3}{y+1}.$$

Für die übrigen Repräsentanten der Transformation dritten Grades gelten durchaus gleiche Formelsysteme in y_1, y_2 und y_3.

§. 9.

Die Theta-Relationen.

Der Verlauf des nunmehr zurückgelegten Gedankenganges hat uns zu einer ersten Stelle geführt, wo sich derselbe mit zahlreichen Untersuchungen, die in der Literatur der elliptischen Functionen vorliegen, enge berührt. Es sind die Relationen zwischen transformirten und getheilten ϑ-Moduln gemeint. Die ältesten Beispiele derartiger Relationen finden sich im Gauss'schen Nachlass. Es sind dort neue transcendente Functionen definirt, welche sich später mit Theilwerthen der Jacobi'schen Thetafunction identisch erwiesen, und Relationen zwischen jenen Grössen aufgestellt. Späterhin und namentlich auch in neuester Zeit hat man diesen Relationen wieder erneute Aufmerksamkeit geschenkt.

Aus den letzt vorhergehenden für die sechste Stufe gegebenen Entwickelungen folgen diejenigen ϑ-Relationen, welche der Transformation des dritten Grades angehören. Man hat diese ϑ-Moduln als der sechsten Stufe angehörig im Modulsystem x, y rational darzustellen und dann zwischen irgend zwei solchen Formeln mit Hülfe der Relation $y^2 = x^3 + 1$ die xy zu eliminiren.

Wir können zunächst die Tabelle des vorigen Paragraphen benutzen und aus irgend zwei der Formeln y eliminiren. In die Relationen geht dann ausser den ursprünglichen ϑ_α nur der eine Repräsentant θ_α ein. Aber offenbar gelten genau dieselben Relationen auch für die $\theta_\alpha^{(i)}$, wie man durch Elimination von y_i aus den analogen Formeln finden würde. Einige Beispiele mögen genügen.

Eliminirt man y aus (13) und (17), so ergiebt sich:

$$(1)\quad \frac{\vartheta_2^2 - \theta_2^2}{2\sqrt{\vartheta_2\theta_2}} = \sqrt{\frac{\theta_3^3}{\vartheta_3}}.$$

Ebenso aus (14) und (17):

$$(2)\quad \frac{\vartheta_2^2 + \theta_2^2}{2\sqrt{\vartheta_2\theta_2}} = \sqrt{\frac{\theta_0^3}{\vartheta_0}}.$$

Deren Product ist:

$$(3)\quad \vartheta_2^4 - \theta_2^4 = 4\,\vartheta_2\theta_2\sqrt{\frac{\theta_0^3\theta_3^3}{\vartheta_0\vartheta_3}}.$$

Ebenso folgt:

(4) $$\vartheta_2^2 + 3\theta_2^2 = 2\sqrt{\vartheta_2\theta_2}\sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{\theta_3}};$$ aus (15) und (17).

(5) $$\vartheta_2^2 - 3\theta_2^2 = 2\sqrt{\vartheta_2\theta_2}\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{\theta_0}};$$ aus (16) und (17).

(6) $$(\vartheta_2^2 - \theta_2^2)\,\vartheta_3^2 = (\vartheta_2^2 + 3\theta_2^2)\,\theta_3^2;$$ aus (17), (18).

(7) $$\vartheta_2^2\theta_3^2 - \vartheta_3^2\theta_2^2 = 2\vartheta_0\theta_0\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3}\sqrt{\theta_2\theta_3};$$ aus (13), (15).

(8) $$\sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{\theta_2}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{\theta_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{\theta_3}} = 0;$$ aus (15), (16).

(9) $$\sqrt{\frac{\theta_0^3}{\vartheta_0}} - \sqrt{\frac{\theta_2^3}{\vartheta_2}} - \sqrt{\frac{\theta_3^3}{\vartheta_3}} = 0;$$ aus (13), (14).

(10) $$\sqrt{\frac{\theta_3^3}{\vartheta_3}} + \sqrt{\frac{\theta_0^3}{\vartheta_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{\theta_2}} = 0;$$ aus (13), (14), (17).

(11) $\vartheta_0\theta_0 + \vartheta_2\theta_2 = \vartheta_3\theta_3$ (Legendre'sche Modulargleichung); aus (5), (6).

(12) $$\vartheta_0^4\theta_3^4 - 4\vartheta_0^3\vartheta_3\theta_0^3\theta_3 + 6\vartheta_0^2\vartheta_3^2\theta_0^2\theta_3^2 - 4\vartheta_0\vartheta_3^3\theta_0\theta_3^3 + \vartheta_3^4\theta_0^4 = 0;$$ aus (12), (14), (16).

Handelt es sich um Relationen, in welche auch Theilwerthe eingehen, so können wir u. a. die Formeln (15), (16), (17) des §. 7 brauchen, wie ein Beispiel zeigen möge. Die erste der drei citirten Formeln schreibt sich in ϑ sofort:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_2} = \sqrt[12]{\frac{\tau\left(\tau - \frac{8}{9}\right)^3}{(\tau-1)^4}}.$$

Die Verbindung von $\lambda(\lambda - 1)$ mit τ kann man nach früheren Formeln schreiben:

$$\sqrt[12]{\frac{\tau^3(8 - 9\tau)}{3^3(\tau-1)^3}} = \sqrt[3]{\frac{4\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_2^2}}.$$

Hieran reihen sich folgende identische Umformungen:

$$\sqrt[3]{\frac{4\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_2^2}} = \sqrt[12]{\frac{\tau\left(\tau - \frac{8}{9}\right)^3}{(\tau-1)^4}} \cdot \sqrt[12]{\frac{3^3\tau^2(1-\tau)}{(8-9\tau)^2}};$$

$$\sqrt[12]{\frac{3^3\tau^2(1-\tau)}{(8-9\tau)^2}} = \sqrt[6]{\frac{y(y^2-9)}{y^2-1}} = \sqrt[6]{y \cdot \frac{y+3}{y-1} \cdot \frac{y-3}{y+1}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{\theta_0\theta_2\theta_3}};$$

$$\sqrt[3]{\frac{4\,\vartheta_0\,\vartheta_3}{\vartheta_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_2}\,\sqrt[3]{\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{\theta_0\,\theta_2\,\theta_3}}$$

oder endlich:

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\theta_0\,\theta_2\,\theta_3}{2}\right)^{1/3}. \tag{13}$$

Man kann weiter auch solche Relationen aufstellen, in welche mehrere Repräsentanten $\theta^{(i)}$ eingehen; z. B. schreiben sich die zwischen den y_i bestehenden Relationen, wie folgt:

$$\theta_\alpha^2 + \theta_\alpha'^2 + \theta_\alpha''^2 + \theta_\alpha'''^2 = 0; \tag{14}$$

$$3\,(\theta_\alpha^4 + \theta_\alpha'^4 + \cdots) = 4\,\vartheta_\alpha^4; \tag{15}$$

$$27\,(\theta_\alpha \,.\, \theta_\alpha' \,.\, \theta_\alpha'' \,.\, \theta_\alpha''')^2 + \vartheta_\alpha^8 = 0; \quad (\alpha = 0, 2, 3). \tag{16}$$

Für eine Anzahl von Relationen zwischen zwei Repräsentanten, z. B. θ_α, θ_α' normire ich wieder die θ_α' so, wie in der Anmerkung über das Integral u, indem ich als Annäherung für den Punkt $\omega = i\,\infty$ festsetze:

$$\sqrt{\theta_2'} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{24}}; \quad \sqrt{\theta_0'} = -\sqrt{\theta_3'} = 1.$$

Dann schreiben sich die Darstellungen der x wie folgt:

$$1 + x = \frac{\theta_2'}{\theta_2}, \quad 1 + x_1 = \frac{\theta_0'}{\theta_0}, \quad 1 + x_2 = \frac{\theta_3'}{\theta_3}. \tag{17}$$

$$\frac{2}{x} = 1 + \sqrt{\frac{\theta_0'\,\theta_3'}{\theta_0\,\theta_3}}, \quad \frac{2}{x_1} = 1 + \sqrt{\frac{\theta_2'\,\theta_3'}{\theta_2\,\theta_3}}, \quad \frac{2}{x_2} = 1 + \sqrt{\frac{\theta_0'\,\theta_2'}{\theta_0\,\theta_2}}. \tag{18}$$

Die Relationen (10) §. 6 zwischen den x_i schreiben sich nun wie folgt:

Die erste:

$$\frac{\theta_0}{\theta_0' - \theta_0} + \frac{\theta_2}{\theta_2' - \theta_2} + \frac{\theta_3}{\theta_3' - \theta_3} = 0, \tag{19}$$

oder:

$$\frac{\theta_0'}{\theta_0' - \theta_0} + \frac{\theta_2'}{\theta_2' - \theta_2} + \frac{\theta_3'}{\theta_3' - \theta_3} = 3; \tag{20}$$

Die vierte Gleichung ist:

$$(\theta_0' - \theta_0)\,(\theta_2' - \theta_2)\,(\theta_3' - \theta_3) = 4\,\theta_0\,\theta_2\,\theta_3. \tag{21}$$

Auch die folgende Gleichung zeigt sich leicht als Identität:

$$(\theta_2 - \theta_2')^2\,(\theta_0\,\theta_3' - 2\,\theta_0\,\theta_3 + \theta_0'\,\theta_3) + 4\,\theta_0\,\theta_2^2\,\theta_3 = 0. \tag{22}$$

Wendet man die Gleichungen (18) zur Darstellung der ersten Relation $\Sigma\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ an, so folgt:

$$\sqrt{\frac{\theta_0'\,\theta_3'}{\theta_0\,\theta_3}} + \sqrt{\frac{\theta_2'\,\theta_3'}{\theta_2\,\theta_3}} + \sqrt{\frac{\theta_0'\,\theta_2'}{\theta_0\,\theta_2}} = -3, \tag{23}$$

oder:

$$(24)\qquad \sqrt{\frac{\theta_2\theta_3}{\theta_2'\theta_3'}} + \sqrt{\frac{\theta_0\theta_3}{\theta_0'\theta_3'}} + \sqrt{\frac{\theta_0\theta_2}{\theta_0'\theta_2'}} = -1.$$

Die vierte Gleichung $xx_1x_2 + 4 = 0$ heisst dann:

$$(25)\quad (\sqrt{\theta_0\theta_2} + \sqrt{\theta_0'\theta_2'})(\sqrt{\theta_2\theta_3} + \sqrt{\theta_2'\theta_3'})(\sqrt{\theta_0\theta_3} + \sqrt{\theta_0'\theta_3'}) = -2\theta_0\theta_2\theta_3.$$

Ist zur Abkürzung:

$$A = \sqrt{\frac{\theta_0\theta_2\theta_3}{\theta_0'\theta_2'\theta_3'}},$$

so ist:

$$(26)\quad \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_2'}} = A\left(\frac{2}{x} - 1\right),\ \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta_0'}} = A\left(\frac{2}{x_1} - 1\right),\ \sqrt{\frac{\theta_3}{\theta_3'}} = A\left(\frac{2}{x_2} - 1\right).$$

Man zeigt dann ohne Mühe:

$$(27)\quad (\sqrt{\theta_0} - \sqrt{\theta_0'})(\sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta_2'})(\sqrt{\theta_3} - \sqrt{\theta_3'}) = -2\sqrt{\theta_0\theta_2\theta_3},$$

sowie:

$$(28)\qquad \sqrt{\frac{\theta_3}{\theta_3'}} + \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta_0'}} = \frac{2\sqrt{\theta_2\theta_2'}}{\theta_2' - 3\theta_2} \text{ u. a. m.}$$

Insbesondere könnte man auch noch die sechsten Theilwerthe mit mehreren Repräsentanten der Transformation verbinden; es würden dann die Grössen $\sqrt[3]{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}$ und $\sqrt[3]{\theta_0\theta_2\theta_3}$ mit ins Spiel kommen, was der obige kurze Passus über Theilwerthe nahe legt. Indessen würde eine erschöpfende Behandlung zu viel Raum in Anspruch nehmen*).

---

*) Zum Inhalt des letzten Paragraphen vergleiche man namentlich die Arbeiten der Herren Möller und Rohde. Bei Herrn Möller (Grunert's Archiv Bd. 1, 2te Reihe) findet man die Relationen (1) bis (13) des Textes im Verein mit vielen anderen, bei Herrn Rohde die letzteren. Ich habe mich jedesmal der betreffenden Terminologie angepasst. Darum war der Wechsel in der Normirung des Repräsentanten nöthig. Leichte Vorzeichendifferenzen beruhen auf einer anderen Wahl der Einheitswurzeln. Die Rohde'sche Arbeit erscheint, wie Herr Prof. Krause die Güte hatte, mir mitzutheilen, in nächster Zeit unter dem Titel „Zur Transformation der Thetafunctionen" in Grunert's Archiv. (September 1885).

Capitel V.

Die achte Stufe.

§. 1.

Das Fundamentalpolygon 8ter Stufe und das einfachste demselben zugehörige Galois'sche System.

Es giebt 192 (*mod.* 8) incongruente Substitutionen; das Fundamentalpolygon dieser Stufe besteht aus 192 Doppeldreiecken und hat ein Geschlecht $p = 5$. Ein Parallelstreif enthält somit den Octaederstreifen viermal in sich. Die einzige beim Octaeder auftretende freie Kante spiegelt zuerst dessen sechs Dreiecke. Zur zweiten Spiegelung ist der nun auftretende Kreis $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ nicht zu benutzen, vielmehr wird am anderen Bogen $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ die ganze jetzt erhaltene Figur noch einmal gespiegelt*). Auch die Kantendeckung dieser Figur lässt sich leicht ohne Rechnung durch *a priori*'sche Schlüsse in Erfahrung bringen. Der Kürze halber übergehe ich ein Referat hierüber. Uebrigens kann man dieses Polygon als 8-blätterige Riemann'sche Fläche über dem Octaeder lagern beziehungsweise als 32-blätterige über dem Diëder $n = 3$.

Es wurde nun bereits mitgetheilt, dass $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ Congruenzmoduln 8ter Stufe sind, welches gruppentheoretisch zu beweisen war. Aber die algebraische Relation

$$(1) \qquad (\sqrt{k})^4 + (\sqrt{k'})^4 = 1$$

beweisst, dass das System $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ auf dem Polygon 8ter Stufe noch nicht eindeutig definirend ist. Denn $\sqrt{k}$ allein definirt acht Punkte und durch die vier verschiedenen dazu gehörigen Werthe $i^a\sqrt{k'}$ ist die Achtdeutigkeit nur erst auf eine Zweideutigkeit herabgesetzt. Wir müssen also eine dritte Grösse hinzusetzen, die selbst wieder mit $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$

*) Das in gewohnter Weise deformirte Polygon entsteht aus einer von Herrn Dyck im 17. Bande der „Math. Ann." gegebenen Figur, indem man jeden der 16 dort auftretenden Kreisausschnitte an der einen freien Kante zur Spiegelung bringt.

durch eine quadratische Gleichung verbunden ist. Eine solche finden wir in der Wurzel aus der Octaederirrationalität. In der That überzeugten wir uns oben, dass $\sqrt{o}$ Modul 8^{ter} Stufe sei, und gemäss der Verbindung mit k, k' nämlich: $o = k' - ik$ gilt die Relation:

$$(2) \qquad (\sqrt{o})^2 = (\sqrt{k'})^2 - i\sqrt{k})^2,$$

so dass durch das Galois'sche System 8^{ter} Stufe:

$$\sqrt{k},\ \sqrt{k'},\ \sqrt{o}$$

unser Fundamentalpolygon auf eine (durch (1) und (2) dargestellte) Raumcurve 8^{ter} Ordnung abgebildet wird.

Des Näheren wollen wir die hier angeführten Wurzelzeichen in der Folge so fixirt denken, dass:

$$\sqrt{k\,(1)} = 1;\ \sqrt{k'(0)} = 1;\ \sqrt{o\,(0)} = 1.$$

§. 2.

Zusammenhang dieses Galois'schen Systems mit transformirten Moduln achter Stufe.

Die durch Transformation 8^{ten} Grades der absoluten Invariante entstehenden Modulfunctionen dieser Stufe sind bereits äusserst complicirt, wie die Angabe der einen hierher gehörigen Formel:

$$(1) \quad J\left(\frac{\omega}{8}\right) = \frac{\{(1-\sqrt{k'})^8 - 16\,(1-k')^4 + 16\,(1+\sqrt{k'})^8\}^3}{864\,\sqrt{k'}\,(1-\sqrt{k'})^{16}\,(1+\sqrt{k'})^4\,(1+k')}$$

bezeugen wird.

Ebenso sind die transformirten λ, wie

$$(2) \qquad \lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = -\frac{(1+k'-2\sqrt{k'})^2}{8\sqrt{k'}\,(1+k')},$$

schwer zu handhaben. Es wird daher gerechtfertigt erscheinen, wenn dieselben übergangen werden und nur noch die drei durch Transformation 2^{ten} Grades aus o entspringenden Moduln etwas ausführlicher betrachtet werden.

Um eine Darstellung der drei Grössen $o\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $o\left(\frac{\omega+1}{2}\right)$, $o\,(2\,\omega)$ durch unser Modulsystem zu ermöglichen, knüpfe ich an die Formeln, welche o mit λ verbinden und benutze diejenigen, welche $\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)$ etc. rational in o darstellen. Die elementare Zwischenrechnung ergiebt dann:

$$(3)\qquad \begin{cases} o\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{k'}; \quad o\left(\frac{\omega+1}{2}\right) = -i\sqrt{k}; \\ o(2\omega) = \frac{\varepsilon\sqrt{k'}+\sqrt{k}}{\varepsilon\sqrt{k'}-\sqrt{k}}; \quad \left(\varepsilon = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

Merkwürdig an diesem Formelsystem ist, dass der dritte Modul 8^{ter} Stufe $\sqrt{o}$ gänzlich aus dem Spiele bleibt*). Das System der transformirten o ist also bereits rational darstellbar in $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ und die Inversion der drei Gleichungen giebt umgekehrt für $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ rationale Ausdrücke in o. Das System der adjungirten o bildet kein Galois'sches System der achten Stufe.

§. 3.

Die $\sigma_{\lambda,\mu}$, welche für die achte Stufe von Wichtigkeit sind.

Wiederholend ist zunächst zu bemerken, dass die drei zweiten Theilwerthe σ_{10}, σ_{01}, σ_{11} die homogene Schreibweise des unvollständigen Systems $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ repräsentiren. Wollen wir vollständige Systeme, so müssen wir zu den vierten Theilsigma gehen. Nach einer obigen Bemerkung sind zunächst die vierten Potenzen dieser Grössen von der achten Stufe. Aber wir können diese sechs Grössen σ_{10}^4, σ_{12}^4, σ_{01}^4, σ_{21}^4, σ_{31}^4, σ_{11}^4 rational in den drei eben genannten zweiten Theilwerthen ausdrücken. Denn sind die letzten drei Theilwerthe durch μ, ν, ϱ bezeichnet in der Zuordnung:

$$(1)\qquad \sigma_{10} = \mu; \quad \sigma_{01} = \nu; \quad \sigma_{11} = \varrho,$$

so ergiebt eine leichte Rechnung, die an §. 4, Cap. III. ansetzt, folgende Endformeln:

$$\sigma_{10}^4 = -\varepsilon\ \varrho\,\nu\,(\varrho^2 + i\nu^2);\ \sigma_{12}^4 = \varepsilon\ \varrho\,\nu\ (\nu^2 + i\varrho^2);\ \left(\varepsilon = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}\right).$$

$$(2)\quad \sigma_{01}^4 = -\varepsilon\ \mu\,\varrho\,(\varrho^2 + i\mu^2);\ \sigma_{21}^4 = \varepsilon\ \mu\,\varrho\ (\mu^2 + i\varrho^2);$$
$$\sigma_{31}^4 = -\varepsilon\ \mu\,\nu\,(\mu^2 + i\nu^2);\ \sigma_{11}^4 = \varepsilon\ \mu\,\nu\ (\nu^2 + i\mu^2).$$

Die rationale Darstellung ist auch hier eine gegenseitige; denn (2) invertirt sich in:

$$(3)\qquad \mu : \nu : \varrho = \frac{i\,\sigma_{01}^4\,\sigma_{21}^4 - \sigma_{31}^4\,\sigma_{11}^4}{\sigma_{12}^4} : \frac{\sigma_{10}^4\,\sigma_{12}^4 - i\,\sigma_{31}^4\,\sigma_{11}^4}{\sigma_{01}^4} : \frac{\sigma_{01}^4\,\sigma_{21}^4 - i\,\sigma_{10}^4\,\sigma_{12}^4}{\sigma_{31}^4}.$$

*) Gleiches gilt übrigens auch für die adjungirten Repräsentanten der transformirten J und λ, wie man durch lineare Transformation der Gleichungen (1) und (2) erfährt; denn die Curve vierter Ordnung (1) §. 1 erleidet dabei Collineationen in sich.

Vermöge der geltenden Beziehung: $\mu^4 + \nu^4 + \varrho^4 = o$ ergiebt sich auch noch aus (2):

$$(4) \qquad \mu : \nu : \varrho = \sigma_{10}{}^2 \sigma_{12}{}^2 : \sigma_{01}{}^2 \sigma_{21}{}^2 : \sigma_{11}{}^2 \sigma_{31}{}^2.$$

Ein vollständiges System der achten Stufe in den vierten $\sigma_{\lambda\mu}$ erhalten wir erst aus dem Formelsystem (4) Seite (33) durch Quotientenbildung und Wurzelziehen. Danach ist:

$$(5) \qquad \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{10}} = \sqrt{o}; \quad \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{21}} = \sqrt{\frac{o+1}{o-1}}; \quad \frac{\sigma_{31}}{\sigma_{11}} = \sqrt{\frac{o+i}{o-i}}.$$

Das System ist symmetrisch, hat sich aber homogener Schreibart noch mehr entfremdet, wie das anfangs zu Grunde gelegte. Die Vollständigkeit resultirt aus folgender Darstellung von $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$.

$$(6) \qquad \begin{aligned} \sqrt{k} &= \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{o+1}{o-1}} \left(\sqrt{o} - \frac{1}{\sqrt{o}} \right); \\ \sqrt{k'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{o+i}{o-i}} \left(\sqrt{o} - \frac{i}{\sqrt{o}} \right), \end{aligned}$$

welche Gleichungen nur andere Schreibweisen früherer Verbindungen von λ und o sind (cf. Formel (3) Seite 28).

Drittens werden bei Gelegenheit der achten Stufe auch achte $\sigma_{\lambda\mu}$ in Frage kommen können. Wir haben 24 wesentlich verschiedene Theilwerthe. Der Umfang der betreffenden Formeln lässt ein näheres Eingehen auf dieselben wenigstens für die achte Stufe nicht als wünschenswerth erscheinen; ich begnüge mich daher mit der Angabe nur eines Beispiels. μ in derselben Bedeutung wie soeben gebraucht, stellt sich $\sigma_{0,1}^{16}$ in folgender Weise dar:

$$(7) \qquad \sigma_{0,1}^{16} = \mu^{16} \frac{o^2 (o^2+1)^2}{(o+1)^8} \cdot \frac{2 k'^2 \sqrt{k'} (1+k')}{(1+\sqrt{k'})^4 (1+\sqrt{k'}+\sqrt{1+k'})^8};$$

$\sqrt{1+k'}$ ist eine mit $\sqrt{o}$ verwandte Grösse, so dass hier der dritte Modul zur Geltung kommt.

In Betreff des Beweises dieser und ähnlicher Formeln muss ich mich mit einer ganz kurzen Skizze begnügen.

Es lag nahe, zuerst den Theilwerth σ_{10} zu untersuchen, der bei der Substitution S erhalten bleibt. Es konnte dann das Polygon auf seinen achten Theil reducirt werden, indem in jedem neuen Achtel sich dasselbe Spiel wiederholte. Aus der Kantendeckung des ganzen Polygons kann dann sofort diejenige der Theilfläche abgelesen werden und die letztere erweist sich als vom Geschlecht $p = 0$. Indem ich nun von dem Polygon einer bekannten Function, z. B. $k(\omega)$ ausging, konnte durch eine Reihe successiver Umformungen des kleineren Polygons das fragliche grössere vom Geschlecht $p = 0$ erreicht werden. Die einzelnen Schritte bestanden dabei aus Transformation von $k(\omega)$, deren

geometrisches Gegenstück eine Dreieckstheilung nach anderem Maassstabe ist, und aus Wurzelziehung, welche neben das gerade vorliegende Polygon eines oder mehrere gleiche legt unter entsprechender Modification der Kantendeckung. So gelang im achten, sowie im neunten und unter einer gewissen Restriction im 16. Falle die Aufstellung der gedachten Hauptmoduln als Wurzelgrössen aus bekannten Modulfunctionen. Der weitere Entwickelungsgang ist dann leicht. Das zugehörige $\sigma_{1,0}$ ist rational im Hauptmodul und die Reihenentwickelungen geben in gewohnter Weise die Form der fraglichen Function.

Die entsprechenden adjungirten Formeln folgen dann durch lineare Transformation.

Capitel VI.

Die neunte Stufe.

§. 1.

Die Fläche und das einfachste Galois'sche System.

Das Polygon der 9ten Stufe umfasst 324 Doppeldreiecke und besitzt ein Geschlecht $p = 10$. Die Zeichnung liefert noch eine übersichtliche, durchaus brauchbare Configuration. Ueber dem Tetraëder lagern wir dieses Polygon als eine 27blätterige Riemann'sche Fläche. Die Verzweigungspunkte liegen dann in den vier Tetraëdercken und zwar hängen in jedem derselben drei Blätter im Cyclus zusammen, so dass auf jede Ecke neun Verzweigungspunkte zu liegen kommen.

Demgemäss dürfen wir von der bereits gemachten Bemerkung Gebrauch machen, dass $\sqrt[3]{a-1}$, $\sqrt[3]{a-\varrho}$, $\sqrt[3]{a-\varrho^2}$; $\left(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$ Congruenzmoduln der 9ten Stufe sind. Die beiden zwischen diesen Grössen bestehenden Relationen nehmen hier die selbstverständliche Form an:

$$(1)\quad (\sqrt[3]{a-1})^3 + 1 = (\sqrt[3]{a-\varrho})^3 + \varrho = (\sqrt[3]{a-\varrho^2})^3 + \varrho^2;$$

eine Raumcurve 9ter Ordnung, für welche man leicht 324 Collineationen in sich angiebt.

Dass in der That dieses System ein vollständiges ist, ergiebt auch folgende Abzählung: $\sqrt[3]{a-1}$ besitzt ein Polygon von 36 Doppeldreiecken, nimmt also einen festen Werth neunmal auf dem Fundamentalpolygon 9ter Stufe an. Durch Adjunction der beiden anderen dritten

Wurzeln wird dann wirklich eindeutige Parameterbestimmung geleistet, da der Grösse $\sqrt[3]{a-1}$ die neun verschiedenen Combinationen $\varrho^\alpha \sqrt[3]{a-\varrho}$; $\varrho^\beta \sqrt[3]{a-\varrho^2}$; $(\alpha, \beta = 0, 1, 2)$ zugehören. Das Polygon erscheint demnach eindeutig auf eine durch (1) dargestellte Raumcurve bezogen.

§. 2.

Beziehungen dieses Modulsystems zu transformirten $a(\omega)$ und $\sigma_{\lambda\mu}$.

Die durch Transformation 9^{ten} Grades von $J(\omega)$ entstehenden Moduln werden wieder ihrer Complicirtheit wegen übergangen. Es bleibt somit nur Transformation dritten Grades auf $a(\omega)$ auszuüben. Dadurch entstehen die vier Moduln 9^{ter} Stufe:

$$a\left(\frac{\omega}{3}\right),\ a\left(\frac{\omega+1}{3}\right),\ a\left(\frac{\omega+2}{3}\right),\ a(3\omega).$$

Um deren Darstellung bequem angeben zu können, sei:

$$\sqrt[3]{a-1} = x;\quad \sqrt[3]{a-\varrho} = y;\quad \sqrt[3]{a-\varrho^2} = z.$$

Dann gilt Folgendes:

$$(1)\qquad \begin{gathered} a\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{a+2}{yz};\quad a\left(\frac{\omega+1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{9\varrho}} \cdot \frac{a\varrho^2+2}{zx}; \\ a\left(\frac{\omega+2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{9\varrho^2}} \cdot \frac{a\varrho+2}{xy}. \end{gathered}$$

$$(2)\qquad a(3\omega) = \frac{a+2xyz}{a-xyz} = \frac{a+2\sqrt[3]{a^3-1}}{a-\sqrt[3]{a^3-1}};$$

oder wenn man statt des vierten Repräsentanten den damit äquivalenten $a\left(\frac{-1}{3\omega}\right)$ einführt:

$$(3)\qquad a\left(\frac{-1}{3\omega}\right) = \frac{a}{xyz} = \frac{a}{\sqrt[3]{a^3-1}}.$$

Die vier transformirten a bilden ein Galois'sches System neunter Stufe. Denn setzt man abkürzend $a_0 = a\left(\frac{-1}{3\omega}\right)$; $a_1 = a\left(\frac{\omega}{3}\right)$; $a_2 = a\left(\frac{\omega+1}{3}\right)$, $a_3 = a\left(\frac{\omega+2}{3}\right)$, so gelten folgende Inversionen, die man ohne Mühe beweist:

$$x = \frac{\sqrt[3]{9}\, a_1^2 a_2 a_3}{a_0 a_1 a_2 a_3 + 2a_0^3 - \frac{16}{9}}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{9\varrho}\, a_1 a_2^2 a_3}{\varrho^2 a_0 a_1 a_2 a_3 + 2a_0^3 - \frac{16}{9}};$$

$$z = \frac{\sqrt[3]{9\varrho^2}\, a_1 a_2 a_3^2}{\varrho\, a_0 a_1 a_2 a_3 + 2a_0^3 - \frac{16}{9}}.$$

Anmerkung: An die Formel (2) knüpft sich noch folgende Bemerkung. Wie man durch eine wiederholte Anwendung der Transformation zweiten Grades auf $\lambda(\omega)$ dazu gelangt, bei gegebenem Werthe von λ das zugehörige ω zu berechnen (vergl. Jacobi, Fundam. nov.), so kann man auch die Formel (2) dazu benutzen, durch eine Kette von Transformationen dritter Ordnung bei gegebenem a den Werth von ω zu berechnen. Für sehr kleine Werthe von q ist ω angenähert $\omega = -\frac{3}{2i\pi} \cdot log(3a - 3)$. Bezeichnet man $a_\nu = a(3^\nu \omega)$, so entnimmt man der Formel (2) folgende Kette von Gleichungen:

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_\nu = \frac{a_{\nu-1} + 2\sqrt[3]{a_{\nu-1}^3 - 1}}{a_{\nu-1} - \sqrt[3]{a_{\nu-1}^3 - 1}},$$

$$a_{\nu+1} = \frac{a_\nu + 2\sqrt[3]{a_\nu^3 - 1}}{a_\nu - \sqrt[3]{a_\nu^3 - 1}}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dann ist allgemein:

$$\omega = \left\{\frac{i\, log(3a_\nu - 3)}{2\pi \cdot 3^{\nu-1}}\right\}_{lim\, \nu = \infty}.$$

Wir wollen zweitens den Zusammenhang der dritten $\sigma_{\lambda\mu}$ mit dem obigen Galois'schen Systeme noch kurz angeben. Aus §. 3 des Cap. III folgt unmittelbar:

$$\sqrt[6]{-3} \cdot \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{10}} = \sqrt[3]{a-1}; \quad \sqrt[6]{-3} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{10}} = \sqrt[3]{a\varrho^2 - 1};$$

$$\sqrt[6]{-3} \cdot \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{10}} = \sqrt[3]{a\varrho - 1},$$

so dass die vier Grössen σ_{10}, σ_{01}, σ_{11}, σ_{12} als homogene Coordinaten der Raumcurve neunter Ordnung angesehen werden können, die wir im vorigen Paragraphen dieser Stufe zu Grunde legten.

Capitel VII.

Die zehnte Stufe.

§. 1.

Vorbemerkung und Fundamentalpolygon zehnter Stufe.

Der äussere Anlass zur Ausführung der nun folgenden Untersuchung waren die zahlreichen für Transformation fünften Grades in der Literatur vorliegenden ϑ-Relationen. Die verhältnissmässig grosse Leichtigkeit, mit welcher die analogen Relationen für Transformation dritten Grades aus einigen der sechsten Stufe angehörenden Formeln hervorgingen, liessen die Untersuchung der zehnten Stufe für den fünften Transformationsgrad als erfolgreich erscheinen. Dabei sei indess gleich vorausbemerkt, dass die beiderseitigen Entwickelungen sich nur in grossen Zügen gleichen, während das Detail der zehnten Stufe durch eine durchaus individuelle Gedankenentwickelung ermöglicht werden musste. — Uebrigens ist die Darstellung durchaus nicht erschöpfend für die zehnte Stufe.

Man zählt (*mod.* 10) 360 incongruente Substitutionen ab, so dass das zu untersuchende Polygon 360 Doppeldreiecke enthält. Ein einzelner Streifen besteht aus 36 einfachen Dreiecken, das Dreifache der Zahl, die beim Ikosaëder auftritt.

In der That kann man, vom Ikosaëder ausgehend, leicht zwei Spiegelungen angeben, welche das Polygon zehnter Stufe entstehen lassen. Aus der zugehörigen Kantendeckung liest man sofort ab, dass die Reduction des Polygons auf zwei symmetrische Parallelstreifen auch hier eine Fläche $p = 0$ liefert, während vier abwechselnd symmetrische und congruente Streifen nun eine Fläche vom Geschlechte $p = 1$ zusammensetzen. Es folgt daraus das wichtige Resultat, dass jede Modulfunction zehnter Stufe, die bei der Substitution S ungeändert bleibt, rational in einer unter ihnen, sagen wir $\tau(\omega)$, darstellbar ist, während je zwei, die nicht bei S, wohl aber bei S^2 invariant sind, höchstens eine Relation $p = 1$ bilden, also als Coordinaten einer elliptischen Curve gedeutet werden können.

Es liegt somit das Problem vor, den Hauptmodul τ näher zu studiren, sowie die Fläche vom Geschlechte $p = 1$ auf eine möglichst einfache Curve zu beziehen.

§. 2.

Bestimmung des Hauptmoduls $\tau(\omega)$*) und der elliptischen Curve.

Wir werden $\tau(\omega)$ dann tauglich zur Darstellung anderer Moduln gemacht haben, wenn wir die numerischen Werthe dieser Grösse in den Spitzen des Polygons in Erfahrung gebracht und dadurch zugleich ein Bild von der Werthevertheilung des τ gewonnen haben. Solcher Spitzen weist das Polygon 8 auf, nämlich in den Punkten:

$$\omega = i\infty,\ 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{10},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2}.$$

Treffen wir nun auch hier die Festsetzung $\tau(i\infty) = \infty$, $\tau(0) = 0$, $\tau\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, und nennen:

$$\tau\left(\frac{1}{5}\right) = \alpha,\ \tau\left(\frac{1}{4}\right) = \beta,\ \tau\left(\frac{3}{10}\right) = \gamma,\ \tau\left(\frac{1}{3}\right) = \delta,\ \tau\left(\frac{2}{5}\right) = \varepsilon,$$

so handelt es sich um die Zahlwerthe α, β, γ, δ, ε.

Die Grössen λ und η bilden ein Galois'sches System der zehnten Stufe; ebenso die Grössen $\lambda(\lambda - 1)$ und η^5 ein dem Modul τ äquivalentes System. (Unter η ist hier die Ikosaëderirrationalität verstanden.) Für beide Functionen liest man aus den betreffenden Dreieckstheilungen folgende rationale Darstellungen ab:

$$(1) \qquad \lambda(\lambda - 1) = c\,\frac{(\tau - \varepsilon)(\tau - \alpha)}{\tau - \gamma}\,\frac{\tau^5(\tau - \delta)^5}{(\tau - 1)^5(\tau - \beta)^5},$$

$$(2) \qquad \eta^5 = -256\,c\,\frac{(\tau - \varepsilon)^2(\tau - \gamma)}{(\tau - \alpha)^2}.$$

Man könnte nun ebenso verfahren, wie in der sechsten Stufe, nämlich die gewonnenen rationalen Ausdrücke in die bekannte Relation $f[\lambda(\lambda - 1), \eta^5] = 0$ einsetzen, um aus der in τ identischen Gleichung eine hinreichende Anzahl von Bedingungen für die α, β, γ . . . zu gewinnen. Aber dieser Weg ist deshalb unmöglich, weil die zu lösenden Gleichungen viel zu complicirt für eine explicite Berechnung der α, β . . . sind. Wir werden also einen indirecten Weg einschlagen, der uns auch zugleich zur Lösung unseres zweiten Problems führt.

Der springende Punkt in dieser ganzen Entwickelung ist der Umstand, dass die lineare Transformation $\omega = \frac{\omega' - 1}{5\omega' - 4}$, angewandt

*) cf. Gierster, Bd. XIV, S. 542 der Math. Ann. Die dort für Transformation zehnten Grades der absoluten Invariante benutzte Grösse τ ist mit dem Hauptmodul τ des Textes nahe verwandt.

auf die Fläche von $\tau(\omega)$, ein Polygon ergiebt, das dem ursprünglichen in allen Theilen ähnlich ist und die entsprechende Kantendeckung aufweist, so zwar, dass sich die Dimensionen der transformirten Fläche zu denen der ursprünglichen verhalten wie 2 : 1. Der Beweis dieser Behauptung lässt sich nur durch eine eingehende Betrachtung der gestaltlichen Verhältnisse führen. Das wesentliche Resultat ist, dass wir für die transformirte Fläche zwei Hauptmoduln besitzen, $\tau\left(\frac{\omega-1}{5\omega-4}\right)$ und $\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)$, und dass wir somit auf die Existenz einer Gleichung schliessen:

$$\tau\left(\frac{\omega-1}{5\omega-4}\right) = \frac{a\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)+b}{c\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)+d}.$$

Die Substitution specieller Werthe für ω bestimmt $a, b \ldots$ in folgender Weise:

$$\tau\left(\frac{\omega-1}{5\omega-4}\right) = \alpha\frac{\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)-1}{\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)-\varepsilon}. \tag{3}$$

Weiterhin bieten sich zwei Wege: Entweder man nimmt weitere specielle ω-Werthe und sucht dadurch Gleichungen zu gewinnen zwischen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, oder man zieht in einer sogleich näher zu beschreibenden Weise die Gleichungen (1) oder (2) heran. Beide Wege führen zu demselben Resultate, das übrigens noch nicht vollständig ist, sondern die unbekannten Zahlen nur eindeutig in einer unter ihnen etwa β giebt, β selbst aber unbestimmt lässt.

Ich führe den zweiten Weg hier durch:

Die Gleichung (1) lautete abgekürzt geschrieben:

$$\lambda(\lambda-1) = r(\tau).$$

Nun ist:

$$\lambda\left(\frac{\omega-1}{5\omega-4}\right) = \lambda\left(\frac{\omega-1}{\omega}\right) = 1-\frac{1}{\lambda(\omega)},$$

so dass:

$$\frac{1-\lambda(\omega)}{\lambda^2(\omega)} = r\left(\alpha\frac{\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)-1}{\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)-\varepsilon}\right) \text{ oder}$$

$$\frac{1-\lambda(2\omega)}{\lambda^2(2\omega)} = r\left(\alpha\frac{\tau(\omega)-1}{\tau(\omega)-\varepsilon}\right). \tag{4}$$

Nun ist nach einer früheren Formel:

$$\lambda(2\omega) = 1 - o^4 \quad \text{also:} \quad r\left(\alpha\frac{\tau-1}{\tau-\varepsilon}\right) = \frac{o^4}{(1-o^4)^2}.$$

Nach Formel (3) Seite 48 ist aber:

$$\lambda(\lambda-1) = \frac{(1-o^4)^2}{16\,o^4} = r(\tau),$$

so dass schliesslich:

$$16\,.\,r(\tau)\,r\left(\alpha\frac{\tau-1}{\tau-\varepsilon}\right) = 1 \tag{5}$$

eine Functionalgleichung für r ist. Aus der bekannten Gestalt dieser Function (1) liest man durch (5) sodann ohne Mühe das folgende Gleichungssystem ab:

$$\alpha = \frac{2\beta^2}{\beta^2+1};\ \gamma = \frac{\beta^2+\beta}{\beta^2+1};\ \delta = \frac{2\beta}{\beta+1};\ \varepsilon = \frac{2\beta}{\beta^2+1}. \tag{6}$$

β bleibt noch unbestimmt, so dass wir gezwungen sind, noch einen Schritt weiter zu gehen.

Zu dem Ende bemerke ich, dass $\tau(\omega)$ und $\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ein volles Modulsystem für die oben beschriebene Fläche vom Geschlechte $p = 1$ bilden und dass jede der Grössen für sich genommen zwei Punkte auf derselben fixirt. Sie bilden das Polygon somit auf eine Curve dritter oder vierter Ordnung ab, welche man in unbestimmten Coefficienten ansetzt und durch specielle ω-Werthe in folgender Form findet:

$$\beta^2(1-\beta^2)\tau^2(\omega) + 2\beta(\beta^2-\beta-1)\tau(\omega)\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2\beta^2\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)-1\right] + (\beta^2+1)\tau(\omega)\tau^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0. \tag{7}$$

Setze ich nun $\omega = \frac{1}{3}$, so wird $\tau(\omega) = \tau\left(\frac{\omega}{2}\right) = \delta = \frac{2\beta}{\beta+1}$, und die Relation (7) geht über in eine biquadratische Gleichung für β.

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ oder gelöst:}$$
$$(x-1)^2\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0. \tag{8}$$

Die Wurzel 1 ist nicht brauchbar, da bereits $\tau\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ist. Welche von den beiden anderen Wurzeln die richtige ist, unterliegt keinem Zweifel, es ist: $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Insgesammt ist somit:

(9) $$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}};\quad \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2};\quad \gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}};$$
$$\delta = 3-\sqrt{5};\quad \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

eine zwischen $\tau(0) = 0$ und $\tau\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ gelegene successiv ansteigende Zahlreihe. (Die andere Wurzel $\beta = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ liegt nicht zwischen 0 und 1 und ist somit wegen der conformen Abbildung unbrauchbar).

Setzt man $\tau(\omega) = x$ und $\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) = y$, so hat die C_3 vom Geschlecht $p = 1$ folgende fertige Form:

(10) $$\left(3-\sqrt{5}\right)x^2 + 2\left(1-\sqrt{5}\right)(2xy + y^2 - y) + 2\sqrt{5}\,xy^2 = 0,$$

wodurch unsere Fragen völlig erschöpfend beantwortet sind.

Hinzusetzen will ich nur dieses, dass auch $\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\tau\left(\frac{\omega+1}{2}\right)$ ein volles Modulsystem der Fläche $p = 1$ bilden und dass sie in die zwischen ihnen bestehende Relation symmetrisch eingehen, da die Substitution S sie permutirt. Ist jetzt $x, y = \tau\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\tau\left(\frac{\omega+1}{2}\right)$, so finde ich

(11) $$\sqrt{5}\,xy(x+y) - 2\left[x^2 + y^2 + \left(1+\sqrt{5}\right)xy\right] + 4(x+y) = 2.$$

§. 3.

Transformation fünften Grades von λ.

Neben die bereits oben mitgetheilte Formel:

(1) $$\lambda(1-\lambda) = c_1 \frac{\left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)\left(\tau - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\tau - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}} \cdot \frac{\tau^5\left(\tau - 3 + \sqrt{5}\right)^5}{(\tau-1)^5\left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5};$$

reiht die übliche Operationsweise für $\lambda(5\omega)\,[1-\lambda(5\omega)]$ die folgende:

(2) $\lambda(5\omega)[1-\lambda(5\omega)]$

$$= c_2 \frac{\left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)^5 \left(\tau - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^5}{\left(\tau - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)^5} \cdot \frac{\tau(\tau - 3 + \sqrt{5})}{(\tau-1)\left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}.$$

Es steht noch aus, die Constanten c_1, c_2 zu bestimmen und ich will zu dem Ende in Erfahrung bringen, wie τ unendlich wird. Ich dividire die fünfte Potenz von (2) durch (1), ziehe die 24. Wurzel und bestimme, dass dieselbe auf der imaginären ω-Axe reell und positiv wird; dann folgt:

$$(3) \quad \sqrt[24]{\frac{\lambda^5(5\omega)[1-\lambda(5\omega)]^5}{\lambda(\omega)[1-\lambda(\omega)]}} = c \cdot \frac{\left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)\left(\tau - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\tau - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}.$$

Uebt man nun die Substitution $\frac{\omega - 1}{5\omega - 4}$ aus, so geht λ für beide Argumente in $1 - \frac{1}{\lambda}$ über. Demnach wird die linke Seite, unter ε eine Einheitswurzel verstanden:

$$\varepsilon \sqrt[8]{\frac{\lambda(\omega)}{\lambda^5(5\omega)}} \sqrt[24]{\frac{\lambda^5(5\omega)[1-\lambda(5\omega)]^5}{\lambda(\omega)[1-\lambda(\omega)]}}.$$

Für die rechte Seite benutze ich die oben bewiesene Beziehung:

$$\tau\left(\frac{\omega - 1}{5\omega - 4}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1}{\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

und finde durch nochmalige Anwendung der Gleichung (3), wodurch übrigens die Constante c verschwindet, folgende merkwürdige Beziehung:

$$(4) \quad \frac{2}{5}(3\sqrt{5} - 7) \cdot \varepsilon \sqrt[8]{\frac{\lambda^5(5\omega)}{\lambda(\omega)}}$$

$$= \frac{\left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)\left(\tau - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\tau - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}} \cdot \frac{\left[\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right]\left[\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\right]}{\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}.$$

Bestimmen wir nun, dass auch $\sqrt[8]{\frac{\lambda^5(5\omega)}{\lambda(\omega)}}$ auf der imaginären Axe

reell und positiv wird, was zulässig ist, so ist $\varepsilon = -1$ zu nehmen und (4) lautet angenähert für den Punkt $\omega = i\infty$:

$$(5) \qquad \frac{2}{5}(7-3\sqrt{5})\sqrt[8]{\frac{\lambda^5(5\omega)}{\lambda(\omega)}} = \tau(\omega)\,.\,\tau\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Aus dem bekannten Unendlichwerden von λ berechnet sich hiernach leicht die gewünschte Formel:

$$(6) \qquad \tau(\omega) = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \cdot q^{-2};$$

so dass wir nunmehr folgende Endformeln hinschreiben können:

$$(7) \quad \lambda(1-\lambda) = \frac{5+3\sqrt{5}}{2^9} \cdot \frac{\left(\tau-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\tau-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)}{\tau-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}} \cdot \frac{\tau^5(\tau-3+\sqrt{5})^5}{(\tau-1)^5\left(\tau-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5};$$

$$(8) \quad \lambda(5\omega)\,[1-\lambda(5\omega)] = \frac{6875+3075\sqrt{5}}{2^9} \cdot \frac{\tau(\tau-3+\sqrt{5})}{(\tau-1)\left(\tau-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\tau-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)^5\left(\tau-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^5}{\left(\tau-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)^5};$$

$$(9) \quad \eta^5 = \frac{5+3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\left(\tau-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\left(\tau-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)}{\left(\tau-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)^2}.$$

Einer aufmerksamen Betrachtung dieser Formeln kann es nicht entgehen, dass an denselben noch eine bedeutende Vereinfachung vorgenommen werden kann. In der That findet sich unter den 36 Dreiecken der Fläche von τ eines, das zugleich $\lambda(\omega)$ und $\lambda(5\omega)$ resp. in $1-\lambda(\omega)$ und $1-\lambda(5\omega)$ überführt und somit bei Betrachtung symmetrischer Functionen von λ und $1-\lambda$ dem Ausgangsdreiecke als äquivalent erachtet werden kann. Die gemeinte Substitution ist $\omega' = \frac{3\omega-1}{10\omega-3}$. Reducirt man die Fläche $\tau(\omega)$ vermöge dieser Substitution, so entsteht eine neue Fläche $p = 0$, deren Hauptmodul

eine rationale Function zweiten Grades von τ sein muss und zur Darstellung obiger symmetrischer Functionen besonders geeignet erscheint. Ebenso gehört der Fläche vom Geschlechte 1 eine Substitution an: $\omega' = \frac{7\omega + 2}{10\omega + 3}$, welche beide λ überhaupt ungeändert lässt. Diese Substitution reducirt das Polygon auf seine Hälfte, die aber wiederum dem Geschlechte $p = 1$ angehört.

Als Hauptmodul der reducirten Fläche $p = 0$ wähle ich t:

$$\frac{\sqrt{5}}{2}(3 - \sqrt{5})\, t \cdot = \frac{\tau(\tau - 3 + \sqrt{5})}{\tau - \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}}, \tag{10}$$

welches die passendste Fixirung ist. t wird dann ∞ wie $-\frac{1}{5} q^{-2}$, verschwindet für $\omega = 0$ und wird für $\omega = \frac{1}{2}$ selbst 1. Auch nun bilden wieder $t(\omega)$ und $t_1 = t\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ein volles Modulsystem für die reducirte Fläche $p = 1$ und bilden dieselbe ab auf die Curve dritter Ordnung:

$$t_1^2(5t - 4) - 2t_1(3t - 2) + t^2 = 0. \tag{11}$$

Giebt man hier t, so sind die beiden Wurzeln t_1:

$$t_1 = t\left(\frac{\omega}{2}\right),\ t_2 = t\left(\frac{\omega + 1}{2}\right),$$

und somit ist:

$$t\left(\frac{\omega}{2}\right) + t\left(\frac{\omega + 1}{2}\right) = \frac{6t - 4}{5t - 4} = 1 + \frac{t}{5t - 4}, \tag{12}$$

$$t\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot t\left(\frac{\omega + 1}{2}\right) = \frac{t^2}{5t - 4}.$$

Sieht man t_1 und t_2 als Galois'sches System an, so ist dieselbe Fläche abgebildet auf:

$$\frac{4}{5}(t_1 + t_2 - 1)^2 = \left(t_1 + t_2 - \frac{6}{5}\right) t_1 t_2 \cdot - \tag{13}$$

Auch hier werden wieder gewisse charakteristische Combinationen der λ Functionen von hervorragender Einfachheit. Ich notire die folgenden vier:

$$\frac{\lambda^5(5\omega)}{\lambda(\omega)};\quad \frac{\lambda^5(\omega)}{\lambda(5\omega)};\quad \frac{\lambda(5\omega)}{\lambda(\omega)};\quad \lambda(5\omega) \cdot \lambda(\omega). \tag{14}$$

Wir können sie als eindeutige Functionen des Ortes auf der reducirten Fläche $p = 1$ ansehen. Dann werden die ersten beiden Quotienten je nur in einem Punkte Null und in einem Punkte ∞; aber immer von 24. Ordnung. Der dritte Quotient wird in zwei getrennt

liegenden Punkten ∞, in zwei eben solchen Null, jedesmal von vierter Ordnung. Das Gleiche gilt vom letzten Ausdruck, nur dass die sechste Ordnung an Stelle der vierten tritt. Da wir auf einer Fläche vom Geschlecht $p = 1$ operiren, so ist das Ausziehen der Wurzeln nicht ohne Weiteres gestattet; vielmehr müsste zuvor eine eingehende Betrachtung der bezüglichen Riemann'schen Flächen davon überzeugen, dass man solchergestalt nicht auf Wurzelfunctionen geführt wird, die wohl unverzweigt, aber nicht eindeutig auf der Fläche sind. Zum Glück erspart uns hier ein einfacher Kunstgriff diese subtilen Ueberlegungen. Ich werde sogleich ausführlich darüber sprechen und nur zuvor der Uebersichtlichkeit wegen das Resultat mittheilen.

Aus den ersten beiden Ausdrücken (14) darf man nur die achte Wurzel ziehen. Die 24 Wurzeln geben zwei Wurzelfunctionen, die beide nur einmal ∞ werden und sich beim Ueberschreiten der Querschnitte um drei Einheitswurzeln ändern. $\sqrt[4]{\frac{\lambda(5\omega)}{\lambda(\omega)}}$ ist eine eindeutige Function auf der Fläche $p = 1$ und nimmt jeden Werth zweimal an. Aus $\lambda(\omega) \,.\, \lambda(5\omega)$ ist es nur gestattet, die Quadratwurzel zu ziehen; die sechste Wurzel ist wieder eine Wurzelfunction. Zur Abkürzung setze ich:

$$x = \sqrt[8]{\frac{\lambda^5(5\omega)}{\lambda(\omega)}}; \quad y = \sqrt[8]{\frac{\lambda^5(\omega)}{\lambda(5\omega)}}; \quad z = \sqrt[4]{\frac{\lambda(5\omega)}{\lambda(\omega)}}; \; w = \sqrt{\lambda(5\omega).\lambda(\omega)}$$

und bestimme, dass alle vier Grössen auf der imaginären Axe reell und positiv werden, was zulässig ist. Das Beweisverfahren obiger Mittheilungen besteht dann im Folgenden:

Wendet man auf x^5 die Substitution S an und multiplicirt die ursprüngliche mit der transformirten Function, so ist dieses Product $\frac{\lambda^5(5\omega)\,[1-\lambda(5\omega)]^5}{\lambda(\omega)\,[1-\lambda(\omega)]}$ eindeutig der Fläche des Hauptmoduls $t(\omega)$ angehörig und wird nur in einem Punkte Null und in einem Punkte ∞, aber jedesmal von 24. Ordnung. Obiger Quotient ist somit die 24. Potenz einer linearen Function von t. Aus (7), (8) folgt auch nach leichter Umrechnung:

$$(15) \qquad \sqrt[24]{\frac{\lambda^5(5\omega)\,[1-\lambda(5\omega)]^5}{\lambda(\omega)\,[1-\lambda(\omega)]}} = \frac{-1}{2\sqrt[3]{2}}\,(5t-4).$$

Die Wirkung der Substitution $\omega = \frac{\omega'-1}{5\omega'-4}$ auf die linke Seite war bereits oben erläutert. Setzen wir noch hinzu:

$$(16) \qquad t\left(\frac{\omega-1}{5\omega-4}\right) = 4\,\frac{t_1-1}{5t_1-4}; \qquad \left[t_1 = t\left(\frac{\omega}{2}\right)\right],$$

so folgt nach ganz elementarer Zwischenrechnung:

$$4x = (5t-4)\,(5t_1-4);$$

so dass wir x rational in den Moduln der kleineren Fläche $p = 1$ dargestellt haben. Dass die 24. Wurzel nicht mehr rational darin sein kann, legt schon der Umstand nahe, dass $\sqrt[8]{\lambda}$ nicht mehr Congruenzmodul ist. Dagegen wurde wieder ein solcher das Product $\sqrt[3]{\lambda\,(1-\lambda)}$, und das entspricht hier dem Umstande, dass die auf zwei Streifen reducirte Fläche vom Geschlecht $p = 0$ wird, also das Auftreten von Wurzelfunctionen nicht mehr zu fürchten ist. Für y, z, w ist der Beweisgang analog; ich begnüge mich mit der Angabe der Resultate. Dabei ist gesetzt worden:

$$x_1 = x(\omega); \qquad x_2 = x(\omega + 1) = -\sqrt[8]{\frac{[1 - \lambda\,(5\,\omega)]^5}{1 - \lambda\,(\omega)}}$$

und entsprechend für die drei anderen Grössen. Dann ist:

$$2\sqrt[3]{2\,x_1\,x_2} = 5\,t - 4; \tag{17}$$

$$2\sqrt[3]{2\,y_1\,y_2} = \frac{t}{t-1}; \tag{18}$$

$$z_1\,z_2 = \frac{(5\,t-4)\,(t-1)}{t}; \tag{19}$$

$$4\sqrt[3]{4\,w_1\,w_2} = \frac{t\,(5\,t-4)}{t-1}. \tag{20}$$

Daran reiht dann die erläuterte Operationsweise:

$$4\,x_1 = (5\,t-4)\,(5\,t_1-4); \tag{21}$$

$$4\,y_1 = \frac{t}{t-1}\cdot\frac{t_1}{t_1-1}; \tag{22}$$

$$z_1{}^3 = \frac{(5\,t-4)\,(t-1)}{t}\cdot\frac{(5\,t_1-4)\,(t_1-1)}{t_1}; \tag{23}$$

$$16\,w_1 = \frac{t\,(5\,t-4)}{t-1}\cdot\frac{t_1\,(5\,t_1-4)}{t_1-1}. \tag{24}$$

In allen vier Formeln kann auch der Index 2 an Stelle von 1 treten. Mit z^3 ist offenbar z selbst eindeutig auf der Fläche, da es jedenfalls z^4 ist.

Vor allen Dingen möchte ich noch die symmetrischen Functionen, also ausser obigen Producten noch die Summen wie $x_1 + x_2$ etc. durch t ausdrücken, was keinerlei Schwierigkeit hat. Beispielsweise ist:

$$4\,(x_1 + x_2) = (5\,t-4)\,(5\,t_1-4) + (5\,t-4)\,(5\,t_2-4);$$

woraus sofort durch Benutzung von (12) resultirt:

$$2\,(x_1 + x_2) = 6 - 5\,t; \text{ daran reihen sich:} \tag{25}$$

$$2\,(y_1 + y_2) = \frac{t-2}{t-1}; \tag{26}$$

$$z_1 + z_2 = -4\,\frac{t-1}{t}; \tag{27}$$

$$2(w_1 + w_2) = \frac{5t^2 - 6t + 2}{t-1}. \tag{28}$$

Es ist nur zu (27) noch eine Bemerkung zu machen. Aus (23) würden wir durch die beschriebene Operation nur zu $z_1^3 + z_2^3$ gelangen, eine Darstellung, welche überdies noch an Complicirtheit leidet. Es bieten sich verschiedene Auswege, um zu $z_1 + z_2$ zu gelangen. Folgender elementare Kunstgriff führt z. B. sehr leicht zum Ziele. Zwischen z_1 und z_2 besteht eine Relation vom Geschlechte $p = 1$. Dieselbe muss symmetrisch sein und sich somit rational aus $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ aufbauen lassen. $z_1 z_2$ in Function von t kennen wir. Dieses eingesetzt, muss die Gleichung für $z_1 + z_2$ eine in t rationale Wurzel haben, eben unsere gesuchte Darstellung. Aus der Werthvertheilung von z_1 und z_2 leitet man nun leicht ab:

$$z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2 - z_1^2 + 2 z_1 z_2 - z_2^2 + z_1 + z_2 = 0. \tag{29}$$

Setzt man nun für den Moment $z_1 + z_2 = x$; $z_1 z_2 = \frac{(5t-4)(t-1)}{t}$, so ist nach (29):

$$x^2 - x \cdot \frac{5t^2 - 8t + 4}{t} - 4\,\frac{(5t-4)(t-1)}{t} = 0.$$

In der That löst sich diese Gleichung rational und die Discussion giebt (27).

Die symmetrischen Relationen von $p = 1$, zwischen x_1, x_2 etc., erhält man nun sofort durch Elimination des t aus den beiden entsprechenden Gleichungen (17) bis (28). Für $z_1 z_2$ gilt (29); entsprechend finde ich:

$$2 x_1 x_2 + (x_1 + x_2 - 1)^3 = 0. \tag{30}$$

$$2 y_1 y_2 + (y_1 + y_2 - 1)^3 = 0. \tag{31}$$

$$32 w_1 w_2 - (w_1 + w_2 + 1)^3 = 0. \tag{32}$$

Auch die Relationen zwischen x und t, y und t etc. lassen sich sofort ansetzen. Beispielsweise gilt für x:

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2 = 0,$$

d. h. durch (17) und (25):

$$x^2 - \frac{6 - 5t}{2}\,x + \frac{(5t-4)^3}{16} = 0 \tag{33}$$

oder

$$125 t^3 - 300 t^2 + 40 (6 + x) t + 16 (x^2 - 3x - 4) = 0$$

und andere mehr.

§. 4.

Transformirte σ-Theilwerthe.

Die in diesen Paragraph fallenden Untersuchungen sind zum guten Theile schon im vorigen erledigt. Um vollständig zu sein, restirt noch die Verbindung von Grössen folgender Art $\frac{\theta_\alpha}{\vartheta_\alpha}$ etc. mit den wohl definirten Moduln τ, t etc. Von der Transformation der 5. Theilwerthe $\sigma_{\lambda\mu}$, sowie von 10. Theilwerthen muss ich absehen; übrigens bringen die letzteren nicht viel Neues. Beginnen wir mit der Darstellung des σ_{10}. Der Theilungsgrad ist 2, der Repräsentant für die Transformation 5. Grades

$$\overline{\omega_1} = \frac{\omega_1}{5}; \qquad \overline{\omega_2} = \omega_2.$$

Das transformirte σ_{10} dividire man durch das ursprüngliche, so ist der Quotient rational in τ. Die fragliche Form der Function bringt man in gewohnter Weise in Erfahrung. Es findet sich:

$$5\,\frac{\overline{\sigma_{10}}}{\sigma_{10}} = \frac{\tau(\tau - 3 + \sqrt{5})}{\left(\tau - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)}; \tag{1}$$

oder vermöge des Zusammenhanges von t und τ

$$\frac{\overline{\sigma_{10}}}{\sigma_{10}} = \frac{t}{5t - 4}, \tag{2}$$

also wiederum eine lineare Function von t.

Weiterhin ist für die transformirte Discriminante

$$\sqrt[4]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta}} = 25\,\frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\cdot\,\frac{\tau - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}{(\tau - 1)\left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\tau - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\tau^2 (\tau - 3 + \sqrt{5})^2}, \tag{3}$$

so dass schliesslich:

$$\left(\frac{\theta_2}{\vartheta_2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\tau - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}{(\tau - 1)\left(\tau - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}; \tag{4}$$

oder in denkbar einfachster Weise:

$$5\left(\frac{\theta_2}{\vartheta_2}\right)^2 = \frac{1}{1-t}. \tag{5}$$

Nun ist die Verbindung unseres λ mit ϑ folgendermaassen:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\right)^4; & 1-\lambda &= \left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)^4. \\ \lambda\,(5\,\omega) &= -\left(\frac{\theta_0}{\theta_2}\right)^4; & 1-\lambda\,(5\,\omega) &= \left(\frac{\theta_3}{\theta_2}\right)^4. \end{aligned} \tag{6}$$

Daraus berechnet sich immer unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln aus den ϑ positiv auf der imaginären Axe genommen werden:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{\vartheta_2\,\theta_0^5}{\theta_2^5\,\vartheta_0}}; & x_2 &= -\sqrt{\frac{\theta_3^5\,\vartheta_2}{\vartheta_3\,\theta_2^5}}; \\ y_1 &= \sqrt{\frac{\vartheta_0^5\,\theta_2}{\vartheta_2^5\,\theta_0}}; & y_2 &= \sqrt{\frac{\vartheta_3^5\,\theta_2}{\theta_3\,\vartheta_2^5}}; \\ z_1 &= \frac{\theta_0\,\vartheta_2}{\vartheta_0\,\theta_2}; & z_2 &= -\frac{\theta_3\,\vartheta_2}{\vartheta_3\,\theta_2}; \\ w_1 &= \left(\frac{\vartheta_0\,\theta_0}{\vartheta_2\,\theta_2}\right)^2; & w_2 &= -\left(\frac{\vartheta_3\,\theta_3}{\vartheta_2\,\theta_2}\right)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Somit ergeben sich folgende drei zusammengehörige Formeln:

$$5\left(\frac{\theta_2}{\vartheta_2}\right)^2 = \frac{1}{1-t}; \qquad 5\left(\frac{\theta_0}{\vartheta_0}\right)^2 = \frac{z_1^2}{1-t}; \qquad 5\left(\frac{\theta_3}{\vartheta_3}\right)^2 = \frac{z_2^2}{1-t}. \tag{8}$$

$$-5\,\frac{\theta_0\,\theta_3}{\vartheta_0\,\vartheta_3} = \frac{z_1\,z_2}{1-t}; \qquad +5\,\frac{\theta_0\,\theta_2}{\vartheta_0\,\vartheta_2} = \frac{z_1}{1-t}; \qquad -5\,\frac{\theta_2\,\theta_3}{\vartheta_2\,\vartheta_3} = \frac{z_2}{1-t}. \tag{9}$$

$$\sqrt{5}\,\frac{\theta_2}{\vartheta_2} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}; \qquad \sqrt{5}\,\frac{\theta_0}{\vartheta_0} = \frac{z_1}{\sqrt{1-t}}; \qquad -\sqrt{5}\,\frac{\theta_3}{\vartheta_3} = \frac{z_2}{\sqrt{1-t}}. \tag{10}$$

§. 5.

Die ϑ-Relationen.

Einmal im Besitze des nun vorliegenden Materials würde man dasselbe noch beliebig häufen können durch Combinationen der x, y, z, w unter einander, durch identische Umformungen u. dergl., und dadurch würde auch insbesondere eine sehr viel grössere Zahl von ϑ-Relationen entspringen. Ich begnüge mich indess mit dem, was jetzt entwickelt ist, und reihe dem auch nur wenige Typen der in Betracht kommenden Relationen an.

Stellen wir zunächst die ϑ-Ausdrücke für die symmetrischen Functionen $x_1 + x_2$, $x_1\,x_2$ etc. fest. Dadurch wird dann wieder ein

enger Spielraum abgegrenzt; denn systematisch wäre es, jede einzelne ϑ-Combination rational in t und t_1 dazustellen, um aus je zwei solchen Formeln vermöge der $C_3\,(t, t_1) = 0$ die t, t_1 selbst zu eliminiren.

$$(1)\qquad 2\,(x_1 + x_2) = 2\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\theta_2^5}}\left(\sqrt{\frac{\theta_0^5}{\vartheta_0}} - \sqrt{\frac{\theta_3^5}{\vartheta_3}}\right) = 6 - 5\,t.$$

$$(2)\qquad 2\,(y_1 + y_2) = 2\sqrt{\frac{\theta_2}{\vartheta_2^5}}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{\theta_0}} + \sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{\theta_3}}\right) = \frac{t-2}{t-1}.$$

$$(3)\qquad z_1 + z_2 = \frac{\vartheta_2}{\theta_2}\left(\frac{\theta_0}{\vartheta_0} - \frac{\theta_3}{\vartheta_3}\right) = -4\,\frac{t-1}{t}.$$

$$(4)\qquad 2\,(w_1 + w_2) = 2\,\frac{(\vartheta_0\,\theta_0 + \vartheta_3\,\theta_3)\,(\theta_0\,\vartheta_0 - \vartheta_3\,\theta_3)}{\vartheta_2^2\,\theta_2^2} = \frac{5\,t^2 - 6t + 2}{t-1}.$$

$$(5)\qquad -2\sqrt[3]{2\,x_1\,x_2} = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{\theta_2^5}}\sqrt[6]{\frac{(4\,\theta_0\,\theta_2\,\theta_3)^5}{4\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}} = 4 - 5\,t.$$

$$(6)\qquad 2\sqrt[3]{2\,y_1\,y_2} = \sqrt{\frac{\theta_2}{\vartheta_2^5}}\sqrt[6]{\frac{(4\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3)^5}{4\,\theta_0\,\theta_2\,\theta_3}} = \frac{t}{t-1}.$$

$$(7)\qquad -z_1\,z_2 = \left(\frac{\vartheta_2}{\theta_2}\right)^3\frac{\theta_0\,\theta_2\,\theta_3}{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3} = \frac{(4-5\,t)\,(t-1)}{t}.$$

$$(8)\qquad -4\sqrt[3]{4\,w_1\,w_2} = \left(\sqrt[3]{\frac{4\,\vartheta_0\,\vartheta_3\cdot 4\,\theta_0\,\theta_3}{\vartheta_2^2\,\theta_2^2}}\right)^2 = -\frac{t\,(5\,t-4)}{t-1}.$$

Die Curven (29), (30), (32), §. 3, schreiben sich in ϑ wie folgt:

$(x_1, x_2) = 0$ geht über in:

$$(9)\qquad \sqrt[6]{\frac{(4\,\theta_0\,\theta_2\,\theta_3)^5}{4\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}} = 2\left(\sqrt{\frac{\theta_0^5}{\vartheta_0}} - \sqrt{\frac{\theta_2^5}{\vartheta_2}} - \sqrt{\frac{\theta_3^5}{\vartheta_3}}\right).$$

$(y_1, y_2) = 0$ geht über in:

$$(10)\qquad \sqrt[6]{\frac{(4\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3)^5}{4\,\theta_0\,\theta_2\,\theta_3}} = 2\left(\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{\theta_2}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{\theta_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{\theta_3}}\right)^{*)}$$

$(z_1\,z_2) = 0$ entspricht:

$$(11)\qquad \begin{aligned}&(\vartheta_0\,\theta_3 - \vartheta_3\,\theta_0 + \theta_0\,\theta_3)\,(\vartheta_0\,\theta_3 - \vartheta_3\,\theta_0 - 4\,\vartheta_0\,\vartheta_3)\\ &\qquad = 5\,\frac{\theta_2}{\vartheta_2}\,\vartheta_0\,\vartheta_3\,(\theta_0\,\vartheta_3 - \theta_3\,\vartheta_0);\end{aligned}$$

$(w_1\,w_2) = 0$ wird:

$$(12)\qquad -\{4\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3\cdot 4\,\theta_0\,\theta_2\,\theta_3\}^{2/3} = 2\,(\vartheta_0^2\,\theta_0^2 + \vartheta_2^2\,\theta_2^2 - \vartheta_3^2\,\theta_3^2).$$

Daneben mögen sich noch folgende Beispiele reihen:

Die Relation zwischen t und z lautet nach früheren Formeln:

*) Diese dreigliederigen Bildungen sind genau den in der 6. Stufe auftretenden entsprechend.

(13) $$z^2 + 4\,\frac{t-1}{t}\,z + \frac{(5\,t-4)\,(t-1)}{t} = 0,$$

oder ein wenig umgesetzt und $z = z_1$ geschrieben:

$$z_1 + \frac{1}{z_1} + 4 - 5\,\frac{1-t}{z_1} - \frac{z_1}{1-t} = 0,$$

d. h. in ϑ-Functionen geschrieben:

$$\frac{\vartheta_0\,\theta_2}{\vartheta_2\,\theta_0} + \frac{\vartheta_2\,\theta_0}{\theta_2\,\vartheta_0} + 4 - \frac{\vartheta_0\,\vartheta_2}{\theta_0\,\theta_2} - 5\,\frac{\theta_0\,\theta_2}{\vartheta_0\,\vartheta_2} = 0$$

oder

(14) $$\vartheta_0^2\,\theta_2^2 + \vartheta_2^2\,\theta_0^2 + 4\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\theta_0\,\theta_2 - \vartheta_0^2\,\vartheta_2^2 - 5\,\theta_0^2\,\theta_2^2 = 0.$$

An Stelle von (x, t) tritt die etwas unübersichtliche Formel:

(15) $$16\,\vartheta_2\,\theta_2\,\frac{\theta_0^5}{\vartheta_0} + (\theta_2^2 - \vartheta_2^2)^3 = 8\,\sqrt{\vartheta_2\,\theta_2}\,\sqrt{\frac{\theta_0^5}{\vartheta_0}\,(\theta_2\,\vartheta_2^2 + \theta_2^3)}.$$

Hier ist immer nur die am nächsten liegende Umsetzung in ϑ benutzt. Eine andere z. B. für (13) ist diese:

Offenbar schreibt sich (13) nach leichter Modification:

$$z^2 - z = \frac{(4 - 5\,t)\,(t-1)}{t}\left(1 + \frac{z}{t-1}\right).$$

Schreiben wir wieder z_1 statt z und benutzen (7), so ist:

$$z_1 - 1 = -\,z_2\left(1 + \frac{z_1}{t-1}\right)$$

und also nach (7), (9), §. 4:

(16) $$\vartheta_3\,(\theta_0\,\vartheta_2 - \vartheta_0\,\theta_2) = \theta_3\,(\vartheta_0\,\vartheta_2 - 5\,\theta_0\,\theta_2).$$

Combiniren wir w mit z, so zeigt man leicht die Identität:

$$(1 - z_1 - z_2 + z_1\,z_2)^2 = 2\,z_1\,z_2\,(1 + w_1 + w_2).$$

Ihr entspricht:

(17) $$(\vartheta_2\,\theta_3 - \vartheta_3\,\theta_2)^2\,(\vartheta_0\,\theta_2 + \vartheta_2\,\theta_0)^2 = 2\,\vartheta_0\,\vartheta_3\,\theta_0\,\theta_3\,(\vartheta_3^2\,\theta_3^2 - \vartheta_0^2\,\theta_0^2 - \vartheta_2^2\,\theta_2^2).$$

Durch Combination der drei Gleichungen (9), §. 4 folgt unter Benutzung von (3) und (7):

(18) $$\frac{\theta_0\,\theta_2}{\vartheta_0\,\vartheta_2} + \frac{\theta_0\,\theta_3}{\vartheta_0\,\vartheta_3} - \frac{\theta_2\,\theta_3}{\vartheta_2\,\vartheta_3} = 1.$$

(19) $$\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2}{\theta_0\,\theta_2} + \frac{\vartheta_0\,\vartheta_3}{\theta_0\,\theta_3} - \frac{\vartheta_2\,\vartheta_3}{\theta_2\,\theta_3} = 5;$$

zwischen w und z besteht folgende Identität:

$$\left(\frac{t}{1-t}\right)^2 = \frac{2\,(1 + w_1 + w_2)}{z_1\,z_2}$$

oder anders geschrieben:

$$\left(\frac{1}{1-t}-1\right)^2 = 2\,\frac{1-t}{z_1 z_2}\,(1+w_1+w_2)\,\frac{1}{1-t};$$ d. h. in ϑ:

$$(20)\qquad (\vartheta_2^2 - 5\,\theta_2^2)^2 = 2\,\frac{\vartheta_0\,\vartheta_3}{\theta_0\,\theta_3}\,(\vartheta_3^2\,\vartheta_3^2 - \vartheta_0^2\,\theta_0^2 - \vartheta_2^2\,\theta_2^2).$$

Endlich erweist sich in t leicht die folgende Gleichung als identisch:

$$\left(1-\frac{z_1^2}{1-t}\right)\left(1-\frac{z_2^2}{1-t}\right) = 16\,\frac{t-1}{t}$$

oder

$$\left(1-\frac{1}{1-t}\right)\left(1-\frac{z_1^2}{1-t}\right)\left(1-\frac{z_2^2}{1-t}\right) = 16,$$

d. h.

$$(21)\qquad (\vartheta_0^2 - 5\,\theta_0^2)\,(\vartheta_2^2 - 5\,\theta_2^2)\,(\vartheta_3^2 - 5\,\theta_3^2) = 16\,\vartheta_0^2\,\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2.$$

Diese Gleichung ist recht instructiv. So übersichtlich und einfach sie erscheinen mag, so ist sie doch keineswegs fundamental, lässt sich vielmehr als Combination von vier verschiedenen einfacheren Relationen aufbauen, was ich schliesslich noch zeigen möchte. Als die beiden fundamentalen Relationen sind anzusehen:

$$(A)\qquad z_1 z_2 - z_1 - z_2 = 5\,(t-1)$$

$$(B)\qquad z_1 + z_2 - 1 = \frac{z_1 z_2}{1-t};$$

die sofort verificirt sind. Dividirt man (A) durch $1-t$ und (B) durch $\sqrt{1-t}$, so folgt:

$$(C)\qquad 1 + \frac{z_1 z_2}{1-t} - \frac{z_1}{1-t} - \frac{z_2}{1-t} + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,(z_1+z_2-1) - \frac{z_1 z_2}{(1-t)\sqrt{1-t}} = -4;$$

oder etwas symmetrischer geschrieben:

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{1-t}}+1\right)\left(\frac{z_2}{\sqrt{1-t}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}-1\right) = 4,$$ d. h. in ϑ:

$$(22)\qquad (\vartheta_0 + \sqrt{5}\,\theta_0)\,(\vartheta_2 - \sqrt{5}\,\theta_2)\,(\vartheta_3 - \sqrt{5}\,\theta_3) = -4\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3.$$

Nimmt man das Zeichen von $\sqrt{1-t}$ negativ, so ergiebt sich in derselben Weise:

$$(23)\qquad (\vartheta_0 - \sqrt{5}\,\theta_0)\,(\vartheta_2 + \sqrt{5}\,\theta_2)\,(\vartheta_3 + \sqrt{5}\,\theta_3) = -4\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3.$$

Das Product von (22) und (23) ist (21)*).

*) Die Mehrzahl der hier mitgetheilten Formeln findet man auch bei Herrn Möller. Die unwesentlichen Vorzeichendifferenzen müssen in einer anderen Wahl der Einheitswurzeln begründet sein. Bezüglich der Formeln des Textes ist oben über die Vorzeichen eine ausdrückliche Festsetzung geschehen.

Capitel VIII.

Die sechszehnte Stufe.

§. 1.

Fundamentalpolygon und Modulsystem 16^{ter} Stufe.

Es handelt sich hier um ein Fundamentalpolygon von 1536 Doppeldreiecken, das dem Geschlecht $p = 81$ angehört. Zugehörige Moduln sind vor allen Dingen $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, zwischen denen die Relation besteht:

$$(1) \qquad (\sqrt[4]{k})^8 + (\sqrt[4]{k'})^8 = 1.$$

Aber allein genommen reichen dieselben wieder keineswegs aus, um einen einzelnen Punkt des Polygons festzulegen, da das durch Simultanstellung von $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ definirte Polygon nur 384 Dreiecke enthält. Durch den Zusatz von $\sqrt{o}$, das sich bei gegebenem $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ aus einer quadratischen Gleichung bestimmt, erreicht man die Vergrösserung dieses Polygons auf die doppelte Anzahl von 768 Dreiecken. Aber das vollständige Polygon hat 1536 Dreiecke. Wir benöthigen also noch eine solche Grösse, von der wir einerseits wissen, dass sie Modul der 16^{ten} Stufe ist und die andererseits mit den obigen Grössen durch eine quadratische Gleichung zusammenhängt. Diese Bedingung erfüllt die Function:

$$(2) \qquad u(\omega) = \sqrt{\frac{\sqrt{2\,k'} + \sqrt{k' + ik}}{\sqrt{2\,k'} - \sqrt{k' - ik}}}.$$

Zu der obigen Relation (1) treten dann noch folgende beide unabhängige algebraische Relationen:

$$(3) \qquad (\sqrt{o})^2 = (\sqrt[4]{k'})^4 - i(\sqrt[4]{k})^4;$$

$$(4) \qquad u^2 = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt[4]{k'})^2 + \dfrac{1}{\sqrt{o}}}{\sqrt{2}\,(\sqrt[4]{k'})^2 - \sqrt{o}}.$$

Der für die successive Entwickelung nothwendige Zusatz von $\sqrt{o}$ ist übrigens im Schlussresultat nicht unbedingt erforderlich, vielmehr

würde bereits $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, u ein Galois'sches System bilden, da man für $\sqrt{o}$ leicht folgende Darstellung findet:

$$\sqrt{o} = \frac{1 + u^2\left[(\sqrt[4]{k'})^4 - i(\sqrt[4]{k})^4\right]}{\sqrt{2}\,(\sqrt[4]{k'})^2\,(u^2-1)}. \tag{5}$$

§. 2.

Darstellung anderer Moduln 16ter Stufe.

Die sechs aus o durch Transformation vierten Grades entstehenden Moduln 16ter Stufe simultan gestellt, sind mit dem System $(\sqrt[4]{k}, \sqrt[4]{k'}, \sqrt{o})$ äquivalent, wie man übrigens nach einer früheren Bemerkung vermuthen musste.

Das erste Formelsystem, welches die transformirten o im Galois'schen System darstellt, finde ich, wie folgt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= o\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{o+1}{2\sqrt{o}\,\sqrt[4]{k'}};\\
x_2 &= o\left(\frac{\omega+1}{4}\right) = \frac{o+i}{2\sqrt{o}\,\sqrt[4]{k}};\\
x_3 &= o\left(\frac{\omega+2}{4}\right) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,\frac{o-1}{2\sqrt[4]{k'}\sqrt{o}};\\
x_4 &= o\left(\frac{\omega+3}{4}\right) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,\frac{o-i}{2\sqrt[4]{k}\,\sqrt{o}};\\
x_5 &= o\left(\frac{-1}{4\,\omega}\right) = \frac{e^{\frac{\pi i}{8}}\sqrt{o}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{kk'}};\\
x_6 &= o\left(\frac{2\omega-1}{4\,\omega}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi i}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt{o}\sqrt[4]{kk'}}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Unter Benutzung der definirten Abkürzungen knüpfen sich hieran folgende bewerkenswerthe Beziehungen:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{o+1}{o-1};\quad \frac{x_2}{x_4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{o+i}{o-i};\quad \frac{x_5}{x_6} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,o. \tag{2}$$

Die Inversion von (1) lautet, wie nun folgt:

$$\sqrt[4]{k} = e^{\frac{-\pi i}{8}} \cdot \frac{x_1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}} x_3}{\sqrt{2}\, x_6}; \quad \sqrt[4]{k'} = e^{\frac{5\pi i}{8}} \cdot \frac{x_2 - \frac{1+i}{\sqrt{2}} x_4}{\sqrt{2}\, x}$$

$$\sqrt{o} = \frac{\sqrt{2}\, x_6 \cdot e^{\frac{5\pi i}{8}}}{(x_1 x_2 + i x_3 x_4) - \frac{1+i}{\sqrt{2}} (x_1 x_4 + x_2 x_3)}$$

Es wird sich schliesslich noch darum handeln, die Beziehungen der Theil-Sigma zur vorliegenden Stufe zu erledigen. Handeln wir demnach zunächst von den vierten Theilwerthen und benutzen μ, ν, ϱ in den oben definirten Abkürzungen (S. 64). Die Quadrate der $\sigma_{\lambda\mu}$ gehören der 16^{ten} Stufe an und in der That findet sich aus früher mitgetheilten Formeln durch eine mühelose Zwischenrechnung:

$$\left(\frac{\sigma_{01}}{\nu}\right)^2 = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{1-k'}}; \qquad \left(\frac{\sigma_{21}}{\nu}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{1+k'}},$$

$$\left(\frac{\sigma_{31}}{\varrho}\right)^2 = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1-k}}; \qquad \left(\frac{\sigma_{11}}{\varrho}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1+k}}; \tag{4}$$

$$\left(\frac{\sigma_{10}}{\mu}\right)^2 = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{k}\ \sqrt[4]{k'}}{\sqrt{k+ik'}}; \qquad \left(\frac{\sigma_{12}}{\mu}\right)^2 = \frac{e^{-\frac{\pi i}{8}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{k}\ \sqrt[4]{k'}}{\sqrt{k-ik'}}.$$

Nennt man die linken Seiten dieser Gleichungen in sofort verständlicher Zuordnung $x_{\lambda\mu}$, so ergeben sich folgende Inversionen:

$$\sqrt[4]{\frac{k'}{k}} = \frac{\sqrt{2}}{x_{11}} \cdot \frac{x_{01} \cdot x_{21}}{x_{01} + x_{21}}; \quad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sqrt{2}}{x_{11}} \cdot \frac{x_{10} \cdot x_{12}}{x_{10} + x_{12}}; \tag{5}$$

$$\sqrt{o} = \sqrt{-i}\, \frac{\sqrt[4]{k}\ \sqrt[4]{k'}}{\sqrt{2}\, x_{10}}.$$

Die auf den rechten Seiten von (4) stehenden Einheitswurzeln sind in die $x_{\lambda\mu}$ hineingezogen.

Für die achten σ-Theile, deren Anzahl 24 ist, findet man ein Formelsystem:

$$\left(\frac{\sigma_{01}}{\mu}\right)^{16} = \frac{o^2 (o^2+1)^2}{(o+1)^8} \cdot \frac{2\, k'^2 \sqrt{k'}\, (1+k')}{(1+\sqrt{k'})^4\, (1+\sqrt{k'}+\sqrt{1+k'})^8} \text{ etc.,} \tag{6}$$

in dem charakteristische Gliederungen hervortreten, so zwar, dass sie in sechs Quadrupel näher mit einander verwandter zerfallen. Es ist dies darum von Wichtigkeit, weil man in angezeigter Weise viergliederige σ-Producte bilden kann, deren Stufe wesentlich erniedrigt wird. Während die $\sigma_{\lambda\mu}$ einzeln der 128^{ten} Stufe angehören, sind die gedachten Producte bis auf die 32^{te} Stufe erniedrigt. Man findet durch factisches Ausmultipliciren:

$$(7)\quad \begin{cases} \sigma_{01}.\sigma_{21}.\sigma_{41}.\sigma_{61} = \varepsilon \dfrac{\sqrt{k}\sqrt[8]{k'}}{2\sqrt[4]{2}\,k\sqrt[4]{k}} \cdot \dfrac{\nu^4}{\sqrt[4]{k+ik'}\sqrt{\sqrt{2k'}+\sqrt{k'+ik}}}, \\ \sigma_{03}.\sigma_{23}.\sigma_{43}.\sigma_{63} = \varepsilon \dfrac{\sqrt{k'}\sqrt[8]{k'}}{2\sqrt[4]{2}\,k\sqrt[4]{k}} \cdot \dfrac{\nu^4}{\sqrt[4]{k-ik'}\sqrt{\sqrt{2k'}-\sqrt{k'-ik}}}, \\ \sigma_{11}.\sigma_{31}.\sigma_{51}.\sigma_{71} = \varepsilon \dfrac{\sqrt{k}\sqrt[8]{k}}{2\sqrt[4]{2}\,k'\sqrt[4]{k'}} \cdot \dfrac{\varrho^4}{\sqrt[4]{k'+ik}\sqrt{\sqrt{2k}-\sqrt{k+ik'}}}, \\ \sigma_{10}.\sigma_{12}.\sigma_{14}.\sigma_{16} = \dfrac{\varepsilon\mu^4}{2\sqrt[4]{2}} \cdot \dfrac{k\sqrt{k'}\sqrt[8]{kk'}}{\sqrt[4]{1+k'}\sqrt{\sqrt{2k'}+\sqrt{1+k'}}}, \\ \sigma_{13}.\sigma_{33}.\sigma_{53}.\sigma_{73} = \varepsilon \dfrac{\sqrt{k}\sqrt[8]{k}}{2\sqrt[4]{2}\,k'\sqrt[4]{k'}} \cdot \dfrac{\varrho^4}{\sqrt[4]{k'-ik}\sqrt{\sqrt{2k}+\sqrt{k-ik'}}}, \\ \sigma_{30}.\sigma_{32}.\sigma_{34}.\sigma_{36} = \dfrac{\varepsilon\mu^4}{2\sqrt[4]{2}} \cdot \dfrac{k\sqrt{k'}\sqrt[8]{kk'}}{\sqrt[4]{1-k'}\sqrt{\sqrt{2k'}-\sqrt{1-k'}}}. \end{cases}$$

Obgleich die einzelnen rechts auftretenden Irrationalitäten nicht mehr Congruenzmoduln sind, wie z. B.:

$$\sqrt[8]{k},\ \sqrt[4]{k'-ik} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\sqrt{2k}+\sqrt{k-ik'}},$$

so gilt dies doch noch für ihre Producte obiger Form.

Besonders einfach werden gewisse Quotienten, die der 16. Stufe angehören. Die Bedeutung der oben eingeführten Grösse u wird dabei hervortreten:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_{01}.\sigma_{21}.\sigma_{41}.\sigma_{61}}{\sigma_{03}.\sigma_{23}.\sigma_{43}.\sigma_{63}} = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{o}} \sqrt{\dfrac{\sqrt{2k'}-\sqrt{k'-ik}}{\sqrt{2k'}+\sqrt{k'+ik}}}, \\ \dfrac{\sigma_{11}.\sigma_{31}.\sigma_{51}.\sigma_{71}}{\sigma_{13}.\sigma_{33}.\sigma_{53}.\sigma_{73}} = \varepsilon\sqrt{o} \sqrt{\dfrac{\sqrt{2k}+\sqrt{k-ik'}}{\sqrt{2k}-\sqrt{k+ik'}}}, \\ \dfrac{\sigma_{10}.\sigma_{12}.\sigma_{14}.\sigma_{16}}{\sigma_{30}.\sigma_{32}.\sigma_{34}.\sigma_{36}} = \varepsilon\dfrac{\sqrt{1-k'}}{\sqrt{k}} \sqrt{\dfrac{\sqrt{2k'}-\sqrt{1-k'}}{\sqrt{2k'}+\sqrt{1+k'}}}. \end{cases}$$

Die ε bedeuten hier stets irgend welche 32 Einheitswurzeln *).

*) Man vergleiche auch noch die Beziehungen dieser Formeln zu früheren Schröter'schen Arbeiten. Es finden sich dort viele ähnlich gebaute irrationale Ausdrücke in k, k', welche immer noch Congruenzmoduln sind, obgleich die einzelnen sie componirenden Factoren diese Eigenschaft in der Regel nicht mehr besitzen.

§. 3.

Schlussbemerkung.

Diese letzte Erscheinung, dass gewisse σ-Producte die einfachsten Moduln werden, ist die einzige, die in hervorragender Weise auf eine mögliche Verallgemeinerung der hier erzielten Resultate hindeutet. Die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind von vornherein für sämmtliche Stufen bekannt und also dürfen wir hoffen, bei höheren Stufen einfachste Modulsysteme zu finden, indem wir analoge Combinationen der $\sigma_{\lambda\mu}$ heranziehen, wie sie sich für niedere Stufen in unseren Formeln thatsächlich einstellen. Allerdings würde eine wirklich in das Wesen der Sache führende Untersuchung nicht mit den hier gebrauchten Mitteln ausgeführt werden, müsste sich vielmehr von wesentlich anderer Seite her den Weg dazu bahnen.

Vita.

Ich, Karl Emanuel Robert Fricke, bin am 24. September 1861 zu Helmstedt geboren und daselbst evangelisch-lutherischer Confession getauft. Da meine Eltern alsbald nach Braunschweig übersiedelten, so habe ich meine Schulbildung in Braunschweig genossen. Nach dem Vorcursus auf einer Bürgerschule besuchte ich von Michaelis 1870 bis Michaelis 1880 das dortige Gymnasium Martino-Catharineum und habe dasselbe am Ende des gedachten Zeitraumes mit dem Zeugniss der Reife verlassen. Seither habe ich auf den Universitäten Göttingen, Zürich, Berlin, Strassburg und Leipzig Mathematik, Physik und Philosophie studirt. Hierselbst in Leipzig bin ich seit vier Semestern immatriculirt und habe in der Zeit die Vorlesungen des Herrn Professor Klein gehört, sowie in dessen Seminar Aufnahme gefunden. Herrn Professor Klein bin ich in hohem Maasse verpflichtet für vielfache Anregung und Förderung und es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem aufrichtigen Danke Ausdruck zu verleihen.

Im letzten Sommersemester habe ich mich vor hiesiger Königl. Prüfungscommission dem Examen pro facultate docendi in der mathematisch-physikalischen Section unterzogen.

Leipzig, Ende August 1885.